Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Anotações de
Dinâmica Estrutural

João Luis Pascal Roehl

ENG. CIVIL - PUC/RJ

ÍNDICE

PÁG.

PÁG.

1. GENERALIDADES

1.1. INTRODUÇÃO

O tipo de problema de interesse da dinâmica estrutural é o que incorpora modificações nas quantidades de movimento dos sistemas elásticos. Assim, a ação de um motor sobre sua base, a do vento ou das ondas do mar, a de terremotos ou explosões,a de impacto ou de cargas móveis, sobre sistemas estruturais, são exemplos desses casos, em que o equilíbrio dos sistemas só é verificado com a consideração de forças de massa. (D'ALEMBERT)

A variação com o tempo das forças que atuam sobre um sistema deformável, faz com que, não sendo o desenvolvimento das forças elásticas suficientemente rápido para manter o equilíbrio, o sistema modifique a sua situação cinemática para buscar o equilíbrio com a ajuda das "forças de massa", ou "forças de inércia". Em linguagem mais precisa, o sistema tem sua quantidade de movimento alterada, e a 2ª lei de Newton assegura a satisfação das condições de equilíbrio.

Basicamente, a grande modificação é a necessidade de incorporação da variável tempo, t, às equações de equilíbrio.

O movimento do sistema transforma-se numa oscilação, pela sucessiva troca de energia potencial em cinética, e vice-versa, e é dito que a estrutura "vibra". Além do caráter repetitivo, ou alternativo, da resposta, as amplitudes dos deslocamentos chegam a ultrapassar, em diversas vezes, os valores correspondentes à aplicação estática da ação, o que empresta ao estudo de dinâmica estrutural uma importância indiscutível.

Toma-se, por exemplo, a viga representada na fig. 1.1;na

parte (a) dessa ilustração encontra-se o gráfico do deslocamento vertical do ponto c, para uma força F_0 agindo estaticamente; na parte (b) da figura, mostra-se o diagrama do mesmo deslocamento para uma força súbita de mesma intensidade F_0.

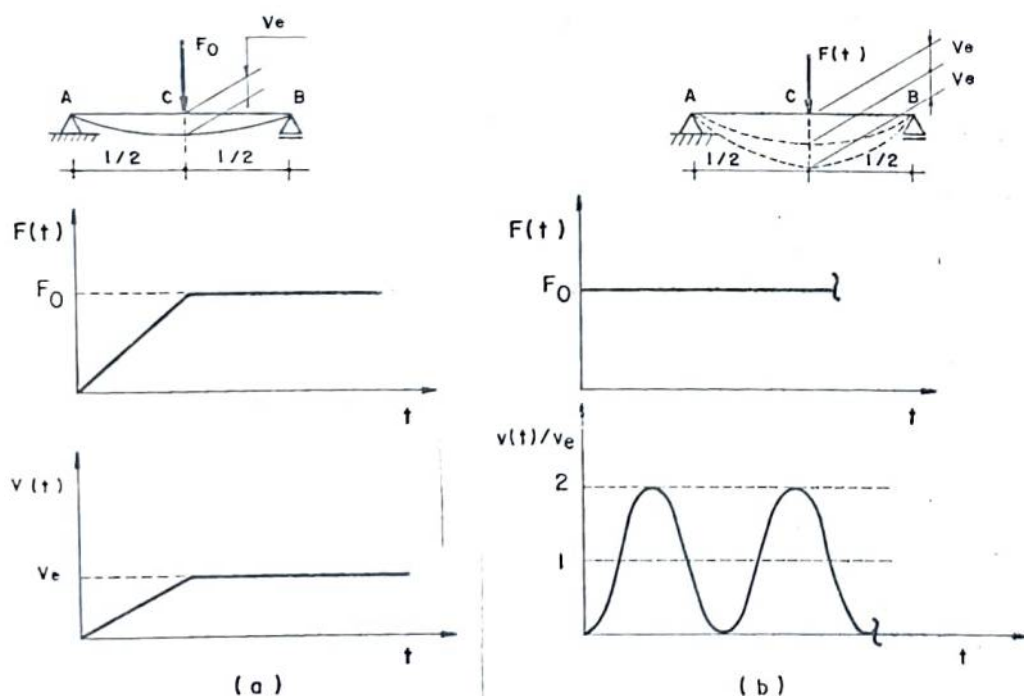



Fig. 1.1. Respostas de cargas: (a) estática; (b) dinâmica

Verifica-se que a simples transformação da carga estática numa ação súbita faz o deslocamento do ponto c ser repetido e com uma amplitude duas vezes maior que no caso estático. Compreende-se que o exemplo considerado é o de um sistema ideal onde não ocorre dissipação de energia - nas estruturas reais há elementos, ou reações internas, que promovem um consumo de energia que provoca uma redução, com o tempo, quer da amplitude, quer do caráter oscilante do movimento.

Um outro ponto peculiar são as acelerações a que o sistema fica submetido, durante a vibração, e que podem limitar a sua

ocupação, cômoda ou estável, por pessoas, itens de equipamento, etc.

1.2. CLASSIFICAÇÃO

As ações dinâmicas que ocorrem em um sistema estrutural podem ser avaliadas de duas maneiras: *determinística*, na qual as características do sistema e da excitação são à priori estabelecidas e *não-determinística*, *randômica* ou *estocástica* quando pelo menos um desses elementos é estabelecido a partir de um conjunto amostral com certa definição probabilística.

A vibração é um termo que descreve a oscilação num sistema mecânico, e na prática não possui muitas vezes um padrão regular, podendo ser uma combinação de vários harmônicos de resposta simples. Se ela repete-se a certos intervalos de tempo é dita *periódica*, do contrário é *não-periódica*, ou *complexa*.

Muitas vezes, a vibração é um movimento periódico, no qual todas as suas características se repetem num determinado intervalo de tempo denominado período. A fig. 1.2 mostra dois movimentos periódicos, qualquer (a) e harmônico (b) ; neste último caso, pode ser escrito o seguinte: $v = v_0 \cos \omega_0 t$, onde $\omega_0 = 2\pi f_0$ é a frequência natural circular, $f_0 = \frac{1}{T_0}$ é a frequência natural e T_0 é o período natural.

As ações atuantes em um sistema material podem ser também, de *curta duração*, na qual as forças dinâmicas externas ao sistema agem num pequeno intervalo de tempo, isto é, numa fração do período natural, caso contrário são de longa duração.

As vibrações podem também ser classificadas em *livres*, quando provocadas exclusivamente pela energia potencial e ciné-

tica existentes no sistema, ou *forçadas*, que incorporam ainda as ações externas sobre o sistema, variáveis com o tempo; e ainda, a vibração é *amortecida* quando o sistema dissipa energia durante a oscilação, sendo *não-amortecida* no caso oposto. É importante salientar que todo sistema não-amortecido é uma idealização para auxiliar no entendimento de situações limites do caso amortecido.

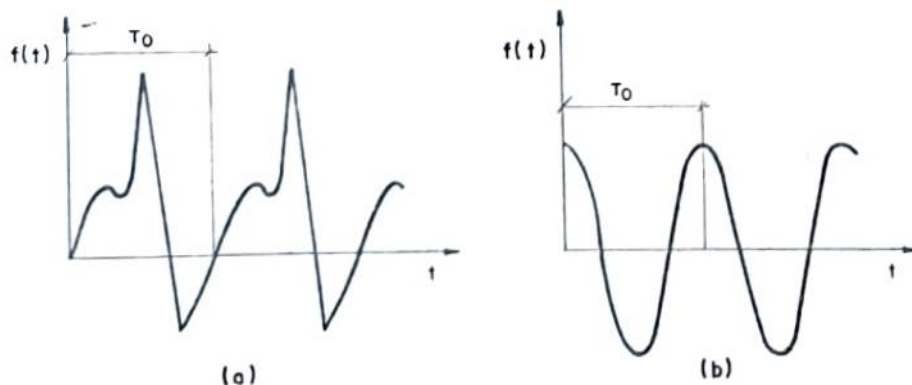



Fig. 1.2. Movimentos periódicos: (a) qualquer; (b) harmônico

2. SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE (S1GL)

2.1. CONCEITUAÇÃO

2.1.1. Definição

Pode-se definir grau de liberdade dinâmico de um sistema da seguinte maneira: "número mínimo de coordenadas para se saber como se encontra, em qualquer instante, a configuração do sistema". Então para S1GL deve-se ter uma única coordenada.

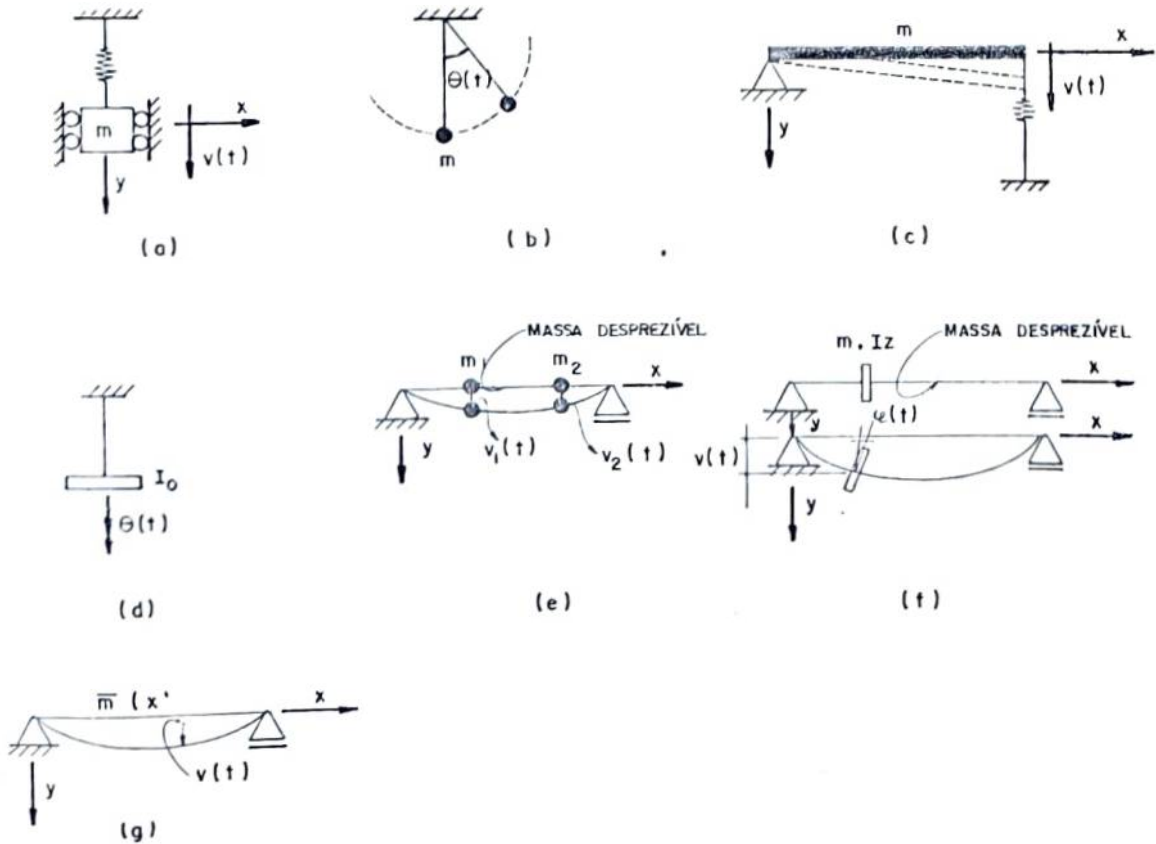



Fig. 2.1. Exemplos de sistemas dinâmicos: (a) sistema de massa simples; (b) pêndulo simples; (c) viga de rigidez infinita com apoio elástico à direita; (d) disco rígido sujeito à torção; (e) viga de massa desprezível com duas massas puntiformes, m_1 e m_2; (f) viga de massa desprezível com uma massa não-puntiforme; (g) viga com massa distribuída ao longo da coordenada x

Na fig. 2.1, é mostrada uma série de exemplos de sistemas dinâmicos. Na parte (a), o sistema está sujeito somente a deslocamentos verticais, pois a massa é obrigada a se deslocar na direção y, possuindo 1G.L. Caso não houvesse restrições das paredes, haveria 6G.L. e ainda no caso da massa da mola não ser desprezível, o número de G.L. seria infinito - é só pensar que cada ponto possuiria 6G.L. Outros exemplos de S1GL podem ser vistos em (b), (c), (d). Nas partes (e) e (f) têm-se S2GL e em (g) um sistema com um número infinito de G.L.- neste caso se é conhecida a configuração na qual a viga irá vibrar, o sistema tem 1G.L..

2.2. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

2.2.1. O OSCILADOR SIMPLES

O oscilador simples é um modelo de estudo para S1GL e é formado de massa, mola e amortecedor. A fig. 2.2a mostra este sistema onde k é a constante elástica, ou rigidez da mola-força necessária para um deslocamento unitário; c é o coeficiente de amortecimento viscoso - força correspondente a uma velocidade unitária. As hipóteses para este modelo são as seguintes:

1) a mola tem massa desprezível;
2) as resistências oferecidas pela mola e pelo amortecedor são proporcionais ao deslocamento e à velocidade, respectivamente;
3) não há perdas de energia devido a atrito que atua externamente ao sistema.

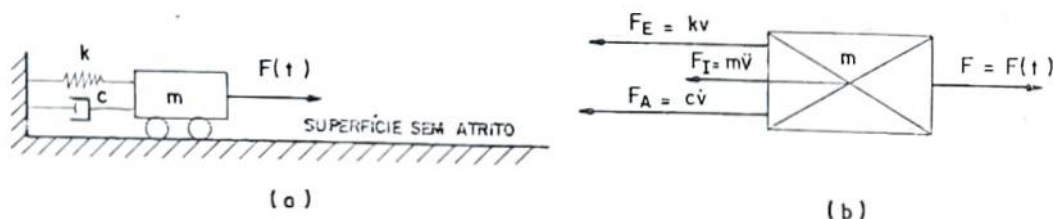



Fig. 2.2. Oscilador simples

2.2.2. MÉTODOS DE ANÁLISE

2.2.2.1. EQUILÍBRIO DIRETO

Na parte (b) da fig. 2.2, são mostradas as forças de inércia, da mola, do amortecimento e a externa, respectivamente F_I, F_E, F_A e $F(t)$. A equação de movimento para o sistema pode ser obtida a partir da 2ª lei de Newton ou pelo princípio de D'Alembert, como se segue.

$$F_I + F_A + F_E = F$$

$$\therefore\ m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = F(t) \qquad (2.1)$$

A equação obtida é diferencial, ordinária, de segunda ordem, linear, não-homogênea e com coeficientes constantes.

A fig. 2.3 mostra o mesmo oscilador, com as forças atuando na direção vertical, parte (b), com a inclusão do seu peso, P, representando todo um conjunto estático de cargas. Assim sendo, a equação diferencial obtida é a seguinte:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + k(v(t)+v_{est}) = F(t) + P \qquad (2.2)$$

Na expressão acima, $v_{est} = P/k$ é o deslocamento estático

do sistema. Substituindo-se esta definição na equação (2.2) obtém-se a mesma equação (2.1).

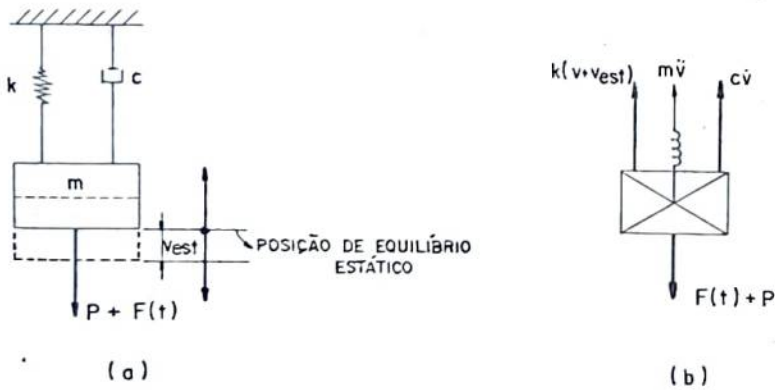



Fig. 2.3. Oscilador simples com a consideração do peso

Isto significa que, ao estudar-se a equação dinâmica, pode-se considerar as forças relativas a partir da posição de equilíbrio estático. As forças estáticas, como visto acima, podem ser desconsideradas, pois cancelam-se mutuamente. Deve-se ter em mente, todavia, que para fins de dimensionamento, a força da mola deve ser considerada, utilizando a expressão seguinte:

$$F = kv(t) + P \tag{2.3}$$

2.2.2.2. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

No modelo apresentado na fig. 2.2a, a massa agora sofre um deslocamento virtual, não nulo, e dessa forma as forças realizam trabalho.

O trabalho total, virtual, realizado pelo sistema deve ser nulo, ou seja:

$$-F_I \, \delta v - F_A \, \delta v - F_E \, \delta v + F \, \delta v = 0 \tag{2.4}$$

$$\therefore \; (-F_I - F_A - F_E + F)\,\delta v = 0$$

O sinal negativo significa que a força tem sentido contrá rio ao deslocamento virtual.

O resultado encontrado é a mesma equação (2.1).

2.2.2.3. PRINCÍPIO DE HAMILTON

O princípio de Hamilton pode ser expresso pela seguinte formulação variacional:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta\, w_{Nc}\, dt = 0 \quad , \qquad (2.5)$$

considerando-se o mesmo oscilador da fig. 2.2, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{v}^2 \quad , \qquad (2.5.1)$$

energia cinética do sistema;

$$V = U = \frac{1}{2} kv^2 \quad , \qquad (2.5.2)$$

energia de deformação da mola, V, que é igual à energia potencial do sistema, U;

$$\delta w_{Nc} = F(t)\delta v - c\dot{v}\,\delta v \quad , \qquad (2.5.3)$$

trabalho virtual realizado pelas forças não conservativas.

Substituindo-se as expressões (2.5.1), (2.5.2), (2.5.3) na expressão (2.5), obtem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\dot{v}\cdot\delta\dot{v} - c\dot{v}\cdot\delta v - kv\cdot\delta v + F(t)\delta v]dt = 0 \qquad (2.6)$$

Integrando-se, por partes, o primeiro termo da eq. (2.6),

notando-se que $\delta\dot{v}=d(\delta v)/dt$, vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}\ \delta\dot{v}\ dt = m\dot{v}\ \delta v\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{v}\ \delta v\ dt \qquad (2.7)$$

Desde que seja adotado que, no princípio de Hamilton, δv desaparece nos limites de integração, o termo $m\dot{v}\delta v\Big|_{t_1}^{t_2}$ se anula e assim:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}\ \delta\dot{v}\ dt = -\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{v}\ \delta v\ dt \qquad (2.8)$$

Voltando, com a exp. (2.8), ã eq. (2.6), tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{v}-c\dot{v}-kv+F(t))\delta v\ dt = 0 \qquad (2.9)$$

Como a variação δv ē arbitrāria, pode ser eliminada da integral e fica claro que a equação de movimento ē a mesma da expressão (2.1).

2.2.3. OUTROS EXEMPLOS PARA S1GL

Exemplo 2.1. Ē mostrada, na fig. 2.4, uma viga de massa desprezīvel, rīgida, de vão L, sujeita a uma força F(t), aplicada a uma distância D do apoio rotulado O'. A mesma possui um apoio elāstico e um amortecedor distanciados, respectivamente, A e B de O' e uma massa concentrada na extremidade direita, como pode-se ver em (a). A parte (b) da ilustração mostra todas as forças agindo sobre o sistema na posição de equilībrio estātico. Em (c), os deslocamentos dinâmicos relativos ã posição de equilībrio estātico são apresentados e em (d) aparecem as for-

ças dinâmicas atuantes na viga.

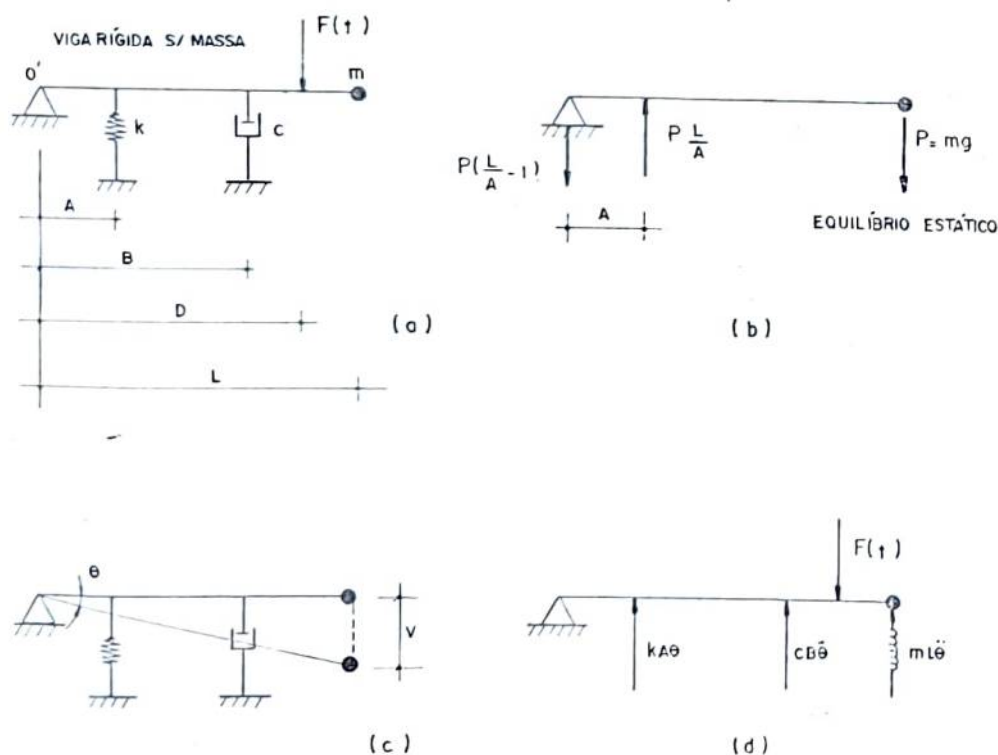



Fig. 2.4. Exemplo 2.1

A equação de movimento pode ser obtida da forma seguinte, utilizando-se do princípio de D'Alembert, isto é, fazendo-se o somatório dos momentos em relação a O' nulo:

$$\Sigma M_{O'} = 0 \rightarrow \; mL\ddot{v} + c\dot{v}\,\frac{B^2}{L} + kv\,\frac{A^2}{L} = F(t)D \qquad (2.10)$$

$$\therefore \; m\ddot{v} + c\left(\frac{B}{L}\right)^2\dot{v} + k\left(\frac{A}{L}\right)^2 v = \frac{D}{L}\,F(t) \qquad (2.11)$$

$$\therefore \; m\ddot{v} + c_{eq}\,\dot{v} + k_{eq}\,v = F_{eq} \qquad (2.12)$$

onde $c_{eq} = c\left(\frac{B}{L}\right)^2$, $k_{eq} = k\left(\frac{A}{L}\right)^2$ e $F_{eq} = \frac{D}{L}\,F(t)$ são os valores equivalentes de amortecimento, rigidez e força externa, respectivamente.

A partir da eq. (2.10), utilizando-se a transformação $v=L\theta$, segue-se:

$$m\ddot{\theta} + c(\frac{B}{L})^2\dot{\theta} + k(\frac{A}{L})^2\theta = \frac{D}{L^2}F(t) \qquad (2.13)$$

<u>Exemplo 2.2</u>. A mesma viga do exemplo 2.1, é colocada agora na posição vertical, fig. 2.5, considerando-se uma força P atuando verticalmente.

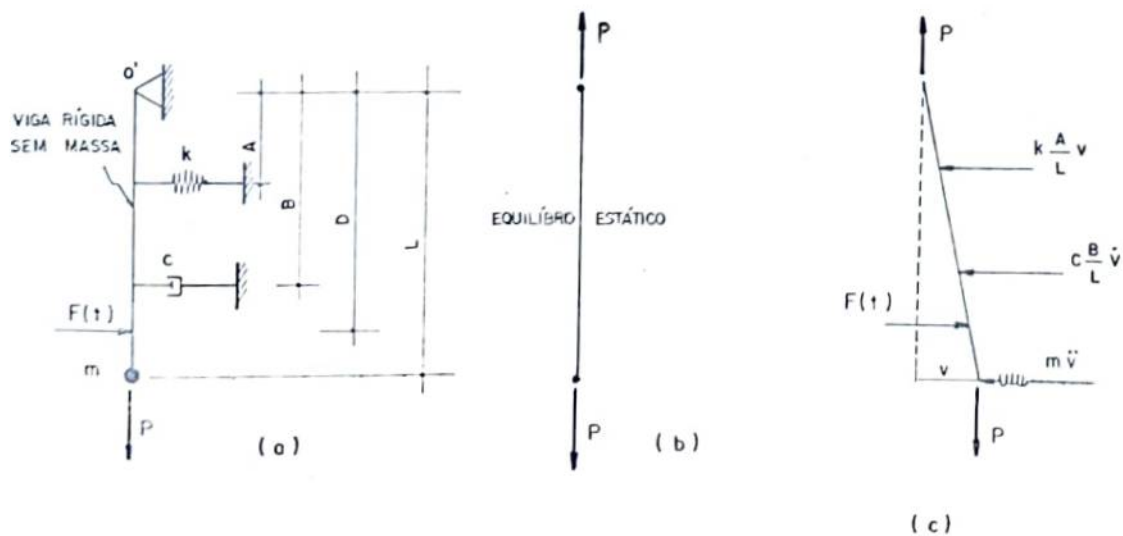



Fig. 2.5. Exemplo 2.2

A equação de movimento é obtida como se segue:

$$\Sigma M_{O'}=0 \quad \therefore \quad m\ddot{v}L+c(\frac{B}{L}\dot{v})B+k(\frac{A}{L}v)A+Pv = FD \qquad (2.14)$$

$$\therefore \quad m\ddot{v}+c(\frac{B}{L})^2\dot{v}+(k(\frac{A}{L})^2+\frac{P}{L})v = \frac{D}{L}F(t) \qquad (2.15)$$

Nota-se que o fator P/L, na equação (2.15), representa um acréscimo na rigidez do sistema e, em relação ao exemplo anterior, a mudança é devida à contribuição do peso. Neste caso, o peso P não pode deixar de ser considerado na equação de movimento.

Exemplo 2.3. Invertendo-se a posição da viga, fig. 2.6, a equação do movimento passa a ser a seguinte:

$$m\ddot{v} + c\left(\frac{B}{L}\right)^2 \dot{v} + \left(k\left(\frac{A}{L}\right)^2 - \frac{P}{L}\right)v = \frac{D}{L} F(t) \qquad (2.16)$$

Observa-se que a rigidez diminui, em relação ao exemplo 2.1, de P/L.

Para o caso em que $\ddot{v}=0$ e $\dot{v}=0$ a equação (2.16) torna-se:

$$\left(k\left(\frac{A}{L}\right)^2 - \frac{P}{L}\right)v = \frac{D}{L} F(t) \qquad (2.17)$$

Três casos são analisados abaixo, com referência ao problema de instabilidade elástica:

se $k > \frac{PL}{A^2}$, o equilíbrio é estável

se $k < \frac{PL}{A^2}$, o equilíbrio é instável

se $k = \frac{PL}{A^2}$, o equilíbrio é indiferente.

A carga crítica é dada por $k\, A^2/L$.

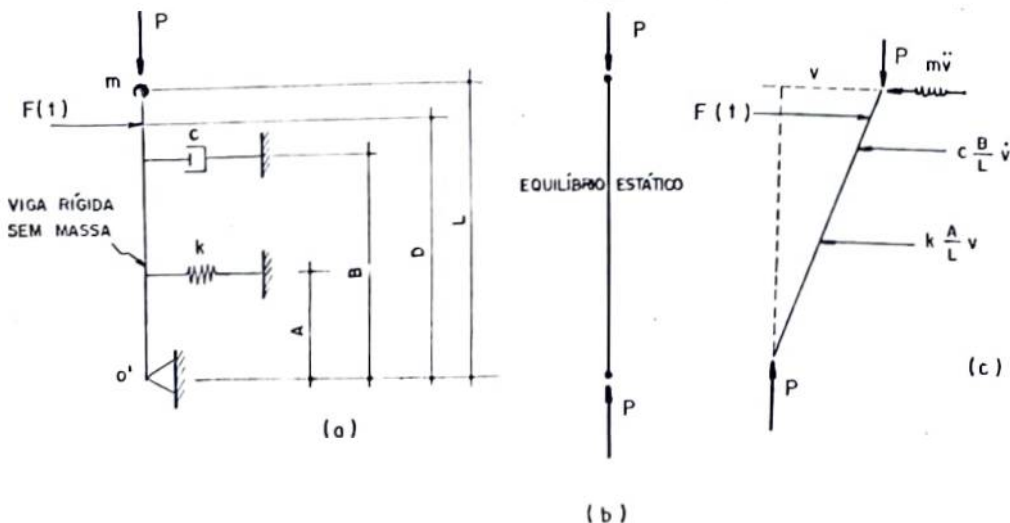



Fig. 2.6. Exemplo 2.3

Exemplo 2.4. Vê-se, pela fig. 2.7, o mesmo problema do exemplo 2.1, com o acréscimo de uma massa distribuída, $\overline{m}$, massa por unidade de comprimento, ao longo da viga.

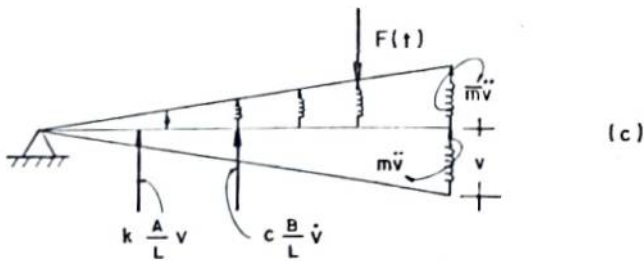
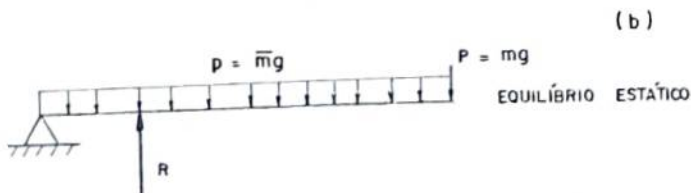
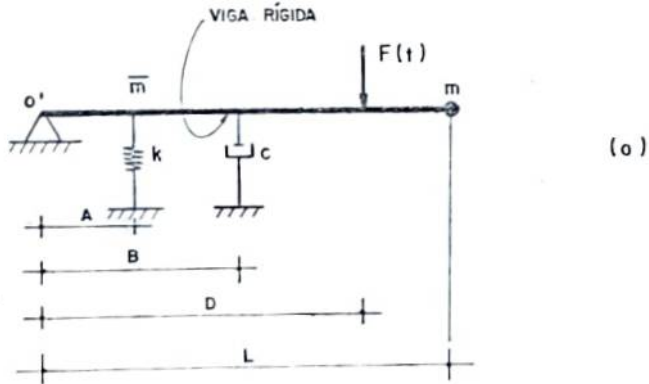



Fig. 2.7. Exemplo 2.4

A equação de movimento é obtida utilizando-se o princípio de D'Alembert, como se segue:

$$\Sigma M_{o'}=0 \therefore m\ddot{v}L+ \frac{1}{3}\,\overline{m}L\;\ddot{v}L+k\,\frac{A}{L}\,Av+c\,\frac{B}{L}\,B\dot{v} = F(t)D \qquad (2.18)$$

$$\therefore \quad (m+ \frac{1}{3}\,\overline{m}L)\ddot{v}+c(\frac{B}{L})^2\dot{v}+k(\frac{A}{L})^2 v = \frac{D}{L}\,F(t) \qquad (2.19)$$

A única diferença, na inclusão da massa distribuída, está no aumento das forças de inércia do sistema. Se $m=\overline{m}L$, pode-se bem avaliar a diferença entre a consideração de massa concentrada e distribuída.

Exemplo 2.5. No problema anterior, colocando-se a viga na posição vertical, fig. 2.8, a equação de movimento torna-se:

$$(m+ \frac{\overline{m}L}{3})\ddot{v}+c(\frac{B}{L})^2\dot{v}+[k(\frac{A}{L})^2 + \frac{1}{L}\,(P+ \frac{1}{2}\,pL)]v = \frac{D}{L}\,F(t) \qquad (2.20)$$

Observa-se, agora, que a inércia e a rigidez aumentam $\overline{m}L/3$ e $\frac{1}{2}$ pL, respectivamente, em relação à equação (2.15).

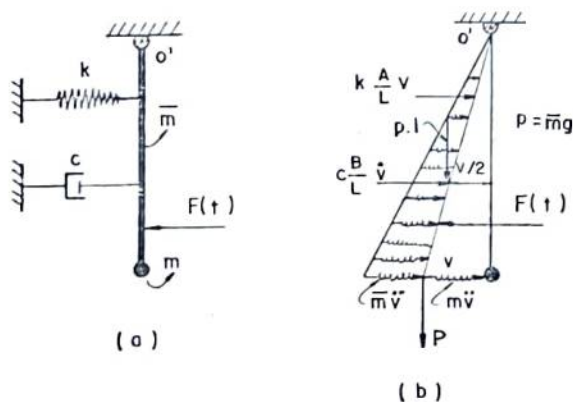



Fig. 2.8. Exemplo 2.5

Exemplo 2.6. Invertendo-se a posição da viga do exemplo anterior de forma semelhante à do 2.3 e, consequentemente, o sentido de p e P, tem-se:

$$(m+ \frac{\overline{m}L}{3})\ddot{v}+c(\frac{B}{L})^2\dot{v}+[k(\frac{A}{L})^2 - \frac{1}{L}\,(P+ \frac{1}{2}\,pL)]v = \frac{D}{L}\,F \qquad (2.21)$$

Ocorre de novo uma diminuição da rigidez.

Exemplo 2.7. É apresentado, na fig. 2.9a, um disco com raio r, massa m, espessura h e massa específica γ. São dados ainda, a rigidez e o amortecimento 'a rotação'e a torção aplicada no centro do disco. A barra que prende o disco é considerada sem massa.

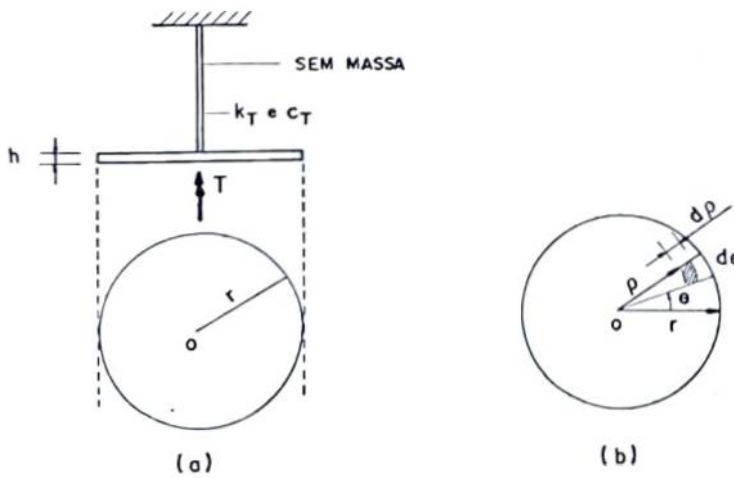



Fig. 2.9. Exemplo 2.7

Para se estabelecer a equação do movimento é aplicado inicialmente o teorema do momento cinético, ou seja, $d\vec{H}_0/dt=\vec{T}_0$, sendo $\vec{H}_0$, o momento cinético e $\vec{T}_0$, o momento das forças externas, em relação ao centro do disco 0. A parte (b) da figura mostra as variáveis que são utilizadas na integração. Assim:

$$\vec{H}_0 = \int_V \underbrace{\rho\dot{\theta}}_{\text{velocidade linear}} \ \underbrace{\gamma dv}_{\text{massa do disco}} \ \underbrace{\rho}_{\text{braço de alavanca}} = \gamma\dot{\theta}h\int_S \rho^2\, ds = \gamma\dot{\theta}h\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\rho^2 d\rho\ \rho\ d\theta$$

$$\therefore \quad \vec{H}_0 = 2\pi\gamma\ h\ \dot{\theta}\ \frac{r^4}{4}$$

$$\therefore \quad \vec{H}_0 = \frac{mr^2}{2}\ \dot{\theta} \quad , \quad \text{onde} \quad m = \pi r^2 h\ \gamma \tag{2.22}$$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{H}_0}{dt} = \frac{mr^2}{2}\ \ddot{\theta} = \vec{T}_0 = T - c_T\dot{\theta} - k_T\theta$$

$$\therefore \quad \frac{mr^2}{2}\ \ddot{\theta} + c_T\dot{\theta} + k_T\theta = T$$

$$\therefore \quad I\ddot{\theta} + c_T\dot{\theta} + k_T\theta = T \tag{2.23}$$

<u>Exemplo 2.8</u>. A obtenção da equação de movimento da viga apresentada na fig. 2.10a, composta de duas barras rígidas interligadas por uma rótula, é vista a seguir.

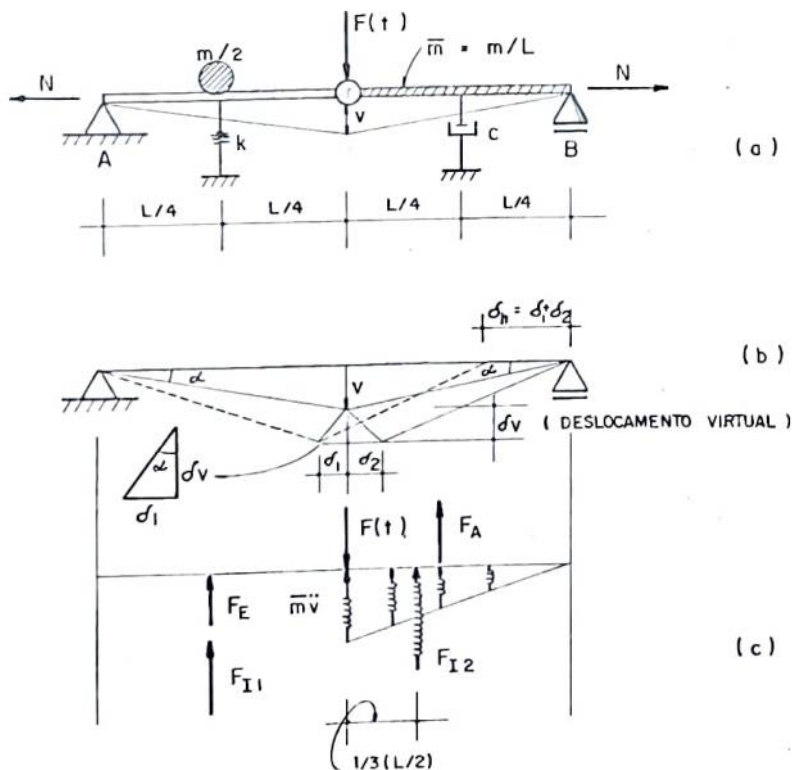



Fig. 2.10. Exemplo 2.8

A massa da viga, à esquerda da rótula, é desprezível. O

deslocamento horizontal é obtido da seguinte forma (fig. 2.10b):

$$\frac{v}{\delta_1} = \frac{L/2}{\delta v} \quad \therefore \quad \delta_1 = \frac{2v\ \delta v}{L} \tag{2.24}$$

$$\delta_1 = \delta_2 \quad \therefore \quad \delta h = 2\delta_1 = \frac{4v\delta v}{L} \tag{2.25}$$

Os cálculos das forças, ilustradas na parte (c), são mostrados a seguir:

$$\begin{aligned} F_E &= kv/2 \\ F_A &= c\dot{v}/2 \\ F_{I_1} &= m\ddot{v}/4 \\ F_{I_2} &= (\bar{m}\ddot{v}\cdot L/2)/2 = m\ddot{v}/4 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Agora, utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais, obtém-se:

$$\frac{m}{4}\ \ddot{v}\ \frac{\delta v}{2} + \frac{m\ddot{v}}{4}\ \frac{2}{3}\ \delta v + \frac{c\dot{v}}{2}\ \frac{\delta v}{2} + \frac{kv}{2}\ \frac{\delta v}{2} + N\ \frac{4v\delta v}{L} - F(t)\delta v = 0$$

$$\therefore \quad \frac{7}{24}\ m\ddot{v} + \frac{c}{4}\ \dot{v} + \frac{kL+16N}{4L}\ v = F(t) \tag{2.27}$$

Observa-se, então, que em todos os exemplos apresentados há um número grande de situações que levam à mesma equação diferencial do oscilador simples, ou seja $m_{ef}\ddot{v}+c_{ef}\dot{v}+k_{ef}v=F_{ef}$ sendo m_{ef}, c_{ef}, k_{ef} e F_{ef}, respectivamente, a massa, os coeficientes de amortecimento e de rigidez e a força externa, efetivos.

2.3. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO PARA S1GL

2.3.1. VIBRAÇÃO LIVRE SEM AMORTECIMENTO

2.3.1.1. EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

A equação diferencial a ser estudada, considerando-se neste caso que o coeficiente de amortecimento e a força externa são nulos, é determinada por condições iniciais de deslocamento e velocidade e escreve-se:

$$m\ddot{v} + kv = 0 \quad \therefore \tag{2.28}$$

$$\ddot{v} + \frac{k}{m} v = 0 \quad \therefore$$

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v = 0 \quad , \tag{2.29}$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é uma frequência angular em rad/seg.

As condições de contorno em t=0 são $v(0)=v_0$ e $\dot{v}(0)=\dot{v}_0$.

2.3.1.2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

O processo de solução da equação diferencial (2.29) é fornecido abaixo:

$$v = e^{rt} \quad \therefore \quad r^2 e^{rt} + \omega_0^2 e^{rt} = 0 \quad \therefore \quad r = \pm i\omega_0 \tag{2.30}$$

A solução geral é obtida por uma combinação linear das duas funções dadas na expressão (2.30), ou seja:

$$v = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} \tag{2.31}$$

$$\therefore \quad v = c_1(\cos \omega_0 t + i \text{ sen } \omega_0 t) + c_2(\cos \omega_0 t - i \text{ sen } \omega_0 t)$$

$v=(c_1+c_2)\cos \omega_0 t+(c_1-c_2)i \text{ sen } \omega_0 t$, ou de outra maneira, fazendo se $A=c_1+c_2$ e $B=i(c_1-c_2)$, tem-se:

$$v = A \cos \omega_0 t + B \text{ sen } \omega_0 t \tag{2.32}$$

Utilizando-se as condições iniciais, apresentadas no item anterior para v=0, obtém-se $A=v_0$ e $B=\dot{v}_0/\omega_0$ e assim:

$$v = v_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{v}_0}{\omega_0} \text{ sen } \omega_0 t \tag{2.33}$$

2.3.1.3. CARACTERÍSTICAS DO MOVIMENTO

Na solução (2.33), os termos em seno e cosseno são harmônicos com mesma frequência ω_0, em rad/seg, período $T_0=2\pi/\omega_0$ e frequência, f_0, em ciclos/seg. Como exemplo, para idéia de ordem de grandeza em sistemas de engenharia civil, indica-se para estruturas rígidas, $T_0 \cong 0.05$ seg, correspondendo a $f_0 \cong 20$ c.p.s , e para as flexíveis, $T_0 \cong 2.00$ seg, com $f_0 \cong 0.5$ c.p.s.

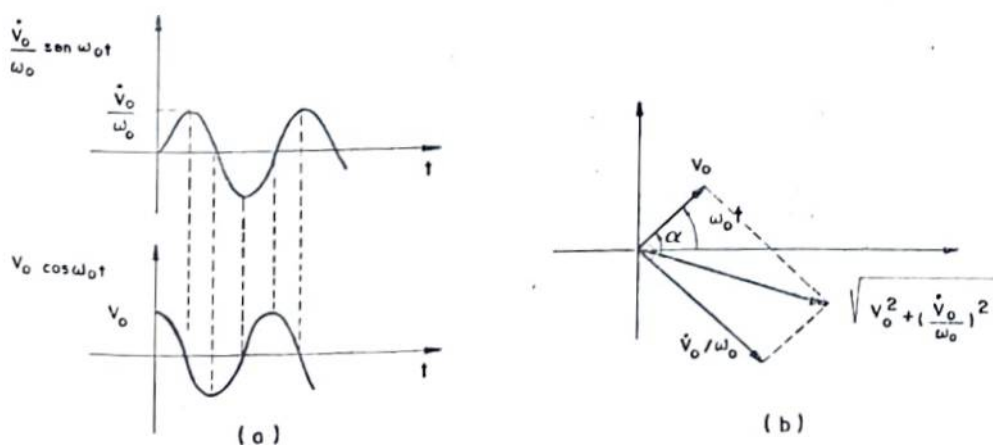



Fig. 2.11. Composição de harmônicos

Visto que os dois harmônicos têm a mesma frequência, é conveniente compô-los em um harmônico resultante, fig. 2.11-(a)

e (b), com a frequência ω_o, isto é:

$$v(t) = \sqrt{v_o^2+(\frac{\dot{v}_o}{\omega_o})^2}\ \cos(\omega_o t-\alpha) \tag{2.34}$$

$$\alpha = tg^{-1}(\frac{\dot{v}_o}{\omega_o v_o}) \tag{2.35}$$

→ defasagem

Pode-se observar que as condições iniciais influenciam somente a amplitude do harmônico. A frequência ω_o é dependente de m e de k, sendo portanto uma característica do sistema. Ela é chamada de frequência natural circular do sistema, sendo f_o e T_o, a frequência e o período naturais, respectivamente.

2.3.1.4. DETERMINAÇÃO DA FREQUÊNCIA NATURAL PARA S1GL

A frequência natural pode ser obtida, ou por processo de cálculo, com a inspeção da equação de movimento, ou experimentalmente, através de instrumentos registradores da resposta, de frequencímetros e de analisadores de espectro. Consideram-se, a seguir, alguns exemplos associados ao primeiro caso.

Exemplo 2.9. Para sistema com massa simples, fig. 2.12, a fórmula, $\omega_o=\sqrt{k/m}$, pode ser escrita como:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{kg}{mg}} = \sqrt{\frac{g}{P/k}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_e}} \tag{2.36}$$

e assim:

$$f_o = \omega_o/2\pi \quad \therefore \quad f_o \cong \frac{0.5}{\sqrt{\delta_e}}, \tag{2.37}$$

onde δ_e é o deslocamento estático provocado pelo peso P.

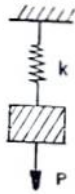



Fig. 2.12. Sistema de massa simples

Utilizando-se as expressões (2.36) e (2.37), são calculadas as frequências naturais, para dados valores de deslocamento estático, como mostrado a seguir.

δ_e = 1/2000 m - f_o = 20 c.p.s. (muito alta)

δ_e = 1/100 m - f_o = 5 c.p.s

δ_e = 1 m - f_o = 0.5 c.p.s. (muito baixa)

Nota-se que quanto mais rígido é o sistema, maior é a sua frequência.

Exemplo 2.10. Para cálculo da frequência natural, considerando o caso de um sistema qualquer, o exemplo 2.8 é utilizado. Da equação (2.27), tira-se:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\frac{k}{4}\left(1+\frac{16N}{kL}\right)}{\frac{7}{24}m}} \quad \therefore \quad \omega_o = \sqrt{\frac{6}{7}\frac{k}{m}\left(1+\frac{16N}{kL}\right)} \qquad (2.38)$$

Neste caso, a frequência depende também da força horizontal, N.

Quando o valor da parcela 16N/kL tende ao infinito, o mesmo fato acontece com ω_o, sendo o sistema infinitamente rígido, e, consequentemente, o período fundamental torna-se nulo,

significando que não há deslocamento na viga. No caso em que a mesma parcela é igual a (-1), o valor de ω_o é nulo, ocorrendo o inverso, significando que o sistema levará um tempo infinito para retornar à posição de equilíbrio, ou seja, é infinitamente flexível, ocorrendo a flambagem do mesmo. Neste caso, então, pode-se calcular o valor da carga crítica do seguinte modo:

$$\frac{16N_{cr}}{kL} = -1 \quad \therefore \quad N_{cr} = -\frac{kL}{16} \tag{2.39}$$

e

$$\omega_o^2 = \frac{6}{7}\frac{k}{m}\left[1-\frac{N}{N_{cr}}\right]$$

$$\therefore \omega_o^2 = \bar{\omega}_o^2[1-N/N_{cr}] \quad , \tag{2.40}$$

sendo $\bar{\omega}_o^2 = \frac{6}{7}\frac{k}{m}$.

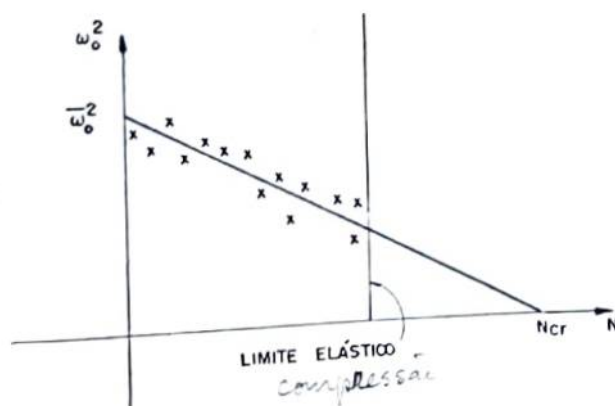



Fig. 2.13. Processo experimental de Southwell

Nota-se que ω_o^2 é uma função linear de N. O processo experimental de Southwell, baseia-se nessa idéia. É obtida a carga de flambagem com ensaios não destrutivos no regime elástico do

material, para diversos valores da carga axial, $N_1, N_2, \ldots$, registrando-se os valores correspondentes de ω_{01}^2, ω_{02}^2, ... e por fim, através de uma extrapolação linear, o valor da carga crítica, N_{cr}, é encontrado, fig. 2.13.

Outros exemplos de cálculo de ω_0 são apresentados a seguir.

Exemplo 2.11. Para a viga flexível com massa desprezível, figura 2.14a, segue-se:

$$k = \frac{F}{\delta} \quad , \quad \delta = \frac{Fa^3}{3EJ} \quad \therefore \quad k = \frac{3EI}{a^3}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{ma^3}} \tag{2.41}$$

Exemplo 2.12. Da fig. 2.14b, com molas em paralelo, tem-se:

$$\delta = \frac{F}{k_1 + k_2} \quad \therefore \quad k_{eq} = k_1 + k_2 \quad , \tag{2.42}$$

rigidez equivalente para molas em paralelo.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \quad \therefore \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \tag{2.43}$$

Exemplo 2.13. Para as molas em série, da fig. 2.14c, o cálculo é feito da seguinte maneira:

$$\delta = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\,\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \quad \therefore \quad k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \tag{2.44}$$

rigidez equivalente para molas em série.

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}} \qquad (2.45)$$

Exemplo 2.14. Para o sistema da figura 2.14d é obtida, a seguir, a rigidez equivalente:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2+k_3} + \frac{1}{k_4}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_4 + k_1 k_3 k_4}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_4 + k_3 k_4)m}} \qquad (2.46)$$

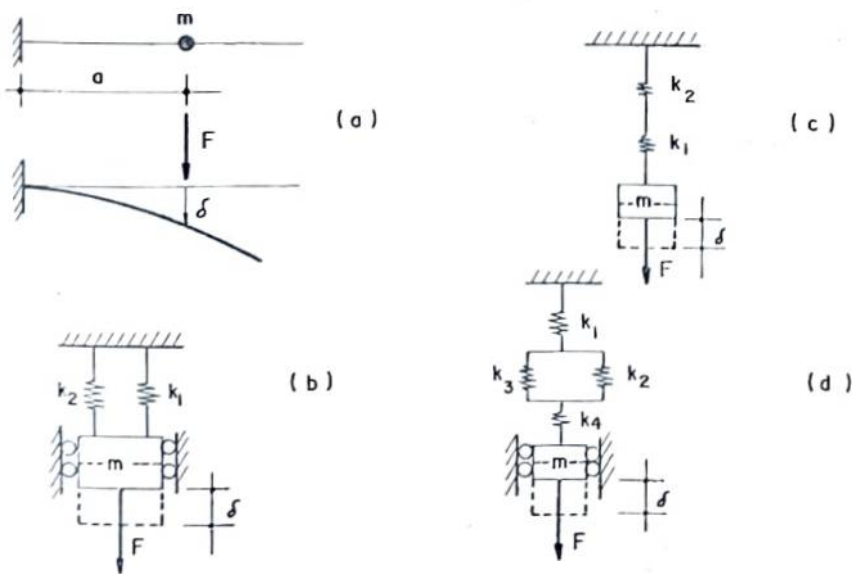



Fig. 2.14. Exemplos para cálculo da frequência ω_o

2.3.2. Vibração Livre com Amortecimento

2.3.2.1. Amortecimento Viscoso

a) Equação do Movimento

No item 2.3.1 foi analisado o comportamento de um oscila

dor simples sem amortecimento, fig. 2.15a, submetido a condições iniciais, cuja solução é dada pela expressão (2.34). A presença do amortecedor muda as características do movimento, passando-se a ter um "movimento harmônico amortecido", ou até sem caráter oscilatório (fig. 2.15-(b) e (c)).

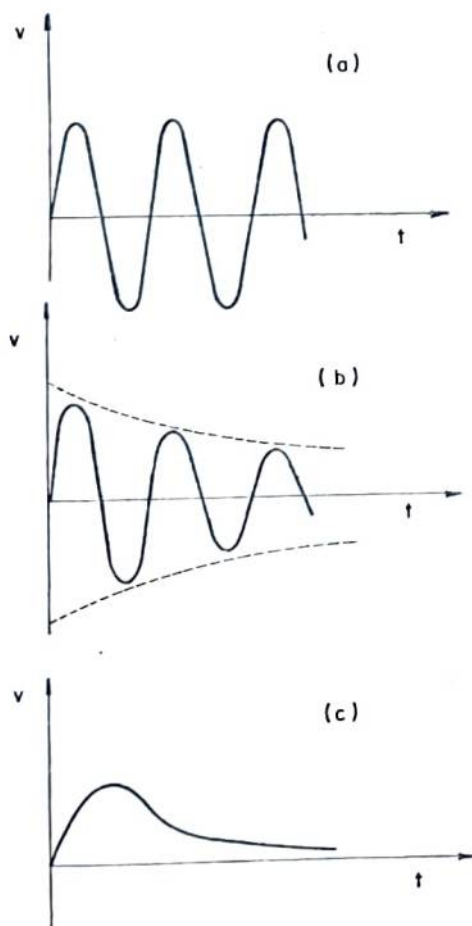



Fig. 2.15. Movimentos: (a) não-amortecido; (b) "harmônico amortecido"; (c) sem caráter oscilatório

A equação a ser estudada é a seguinte:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}\dot{v} + \frac{k}{m}v = 0 \qquad (2.47)$$

Sendo $\omega_0^2 = k/m$ e $2\xi\omega_0 = c/m$, vem:

$$\ddot{v} + 2\xi\omega_0\dot{v} + \omega_0^2 v = 0 \qquad (2.48)$$

O movimento, agora, é definido pelos parâmetros do sistema ω_0 e ξ, sendo esta última uma constante adimensional, cujo significado é visto posteriormente.

b) Solução da Equação de Movimento

A função $v=e^{rt}$ é novamente escolhida para a solução da equação. Assim, substituindo-a na equação (2.48), vem:

$$e^{rt}[r^2+2\xi\omega_0 r+\omega_0^2] = 0 \quad \therefore \quad r^2+2\xi\omega_0 r+\omega_0^2 = 0 \quad \therefore$$

$$r_{1,2} = \omega_0[-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}] \qquad (2.49)$$

A solução geral é escrita da seguinte maneira:

$$v = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad , \qquad (2.50)$$

onde c_1 e c_2 são calculadas a partir das condições iniciais do problema.

c) Características do Movimento

As características do movimento representado pela solução (2.49) dependem de três casos, vistos a seguir.

1º caso - $\xi<1$: É o caso das estruturas usuais, correspondendo a um baixo valor de amortecimento. O sistema é "subamortecido".

Então, é verificado na expressão (2.49), que as raízes são imaginárias e assim:

$$r_{1,2} = \omega_o(-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}) = -\xi\omega_o \pm i\omega_a \quad , \tag{2.51}$$

onde

$$\omega_a = \omega_o\sqrt{1-\xi^2} \tag{2.52}$$

Substituindo a expressão (2.51) em (2.50) vem:

$$v(t) = e^{-\xi\omega_o t}(c_1 e^{i\omega_a t} + c_2 e^{-i\omega_a t}) \quad \therefore$$

$$v(t) = e^{-\xi\omega_o t}(A \cos \omega_a t + B \operatorname{sen} \omega_a t) \tag{2.53}$$

A solução (2.53) representa um movimento oscilatório com a amplitude diminuindo segundo a exponencial de $(-\xi\omega_o t)$ - tem-se um "movimento harmônico amortecido". Entretanto pode ser notado, pela figura 2.14b, que este movimento, num sentido mais amplo, não é periódico pelo fato da sua amplitude não ser preservada. Pode-se ainda denominá-lo de "movimento pseudo-harmônico" ou "pseudo-periódico".

Definida na expressão (2.52), ω_a é conhecida como "frequência circular amortecida" ou "pseudo-frequência", sendo a relação $\dfrac{\omega_a}{\omega_o} < 1$.

As constantes de integração A e B são determinadas pelas condições iniciais do movimento, v_o e $\dot{v}_o$, em t=0, e dessa forma:

$$v = v(0) = v_o \Longrightarrow v_o = A$$

$$\dot{v} = \dot{v}(0) = \dot{v}_o \Longrightarrow \dot{v}_o = -A\xi\omega_o + B\omega_a \quad \therefore \quad B = \frac{\dot{v}_o}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\, v_o$$

Então:

$$v = e^{-\xi\omega_o t}\left[v_o \cos\omega_a t + \left(\frac{\dot{v}_o}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\, v_o\right) \text{sen}\, \omega_a t\right] \tag{2.54}$$

Compondo-se os harmônicos da expressão (2.54) (figura 2.16), a solução pode ser expressa em sua forma final como:

$$v = e^{-\xi\omega_o t}\sqrt{v_o^2 + \left(\frac{\dot{v}_o}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\, v_o\right)^2}\, .\, \cos(\omega_a t - \alpha) \tag{2.55}$$

onde

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\dfrac{\dot{v}_o}{\omega_a} + \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\, v_o}{v_o} \tag{2.56}$$

Para o caso de estruturas em que $\xi<1$, são exemplificadas as seguintes:

- pontes metálicas — $\xi=0.01$ a 0.02
- pontes de concreto — $\xi=0.02$
- edifícios — $\xi\cong0.05$
- estruturas "off-shore"
  - aço, soldadas — $\xi=0.005$
  - aço, aparafusadas — $\xi=0.008$
  - concreto — $\xi=0.01$

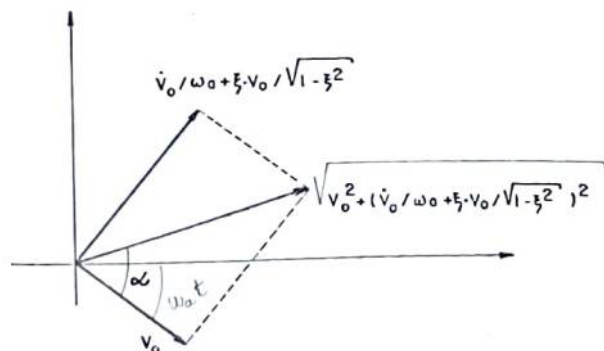



Fig. 2.16. Composição do movimento da expressão (2.54)

2º Caso - $\xi > 1$: O radicando, na expressão (2.49) é positivo e as raízes são reais e negativas. O movimento em questão, não é oscilatório e o sistema é dito "superamortecido". Utilizando-se a expressão (2.50), segue-se:

$$v = e^{-\xi\omega_0 t}[c_1 e^{\omega_a t} + c_2 e^{-\omega_a t}] \quad \therefore \quad \text{sendo } e^{\theta} = \cosh\theta + \text{senh}\,\theta$$

e $e^{-\theta} = \cosh\theta - \text{senh}\,\theta$, vem:

$\omega_a = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$

$$v = e^{-\xi\omega_0 t}\{c_1[\cosh(\omega_a t) + \text{senh}\,(\omega_a t)] +$$

$$+ c_2[\cosh(\omega_a t) - \text{senh}(\omega_a t)]\}$$

$\therefore$ Para $c_1 + c_2 = A$ e $c_1 - c_2 = B$, segue-se:

$$v = e^{-\xi\omega_0 t}[A\cosh(\omega_a t) + B\,\text{senh}(\omega_a t)] \tag{2.57}$$

Aplicando-se as condições iniciais em t=0, que são v_0 e $\dot{v}_0$, vem:

$$A = v_0 \quad \text{e} \quad B = \frac{\dot{v}_0}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\,v_0$$

A solução final é dada por:

$$v = e^{-\xi\omega_0 t}[v_0\cosh(\omega_a t) + (\frac{\dot{v}_0}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\,v_0)\,\text{senh}(\omega_a t)] \tag{2.58}$$

A fig. 2.17 apresenta um gráfico da solução (2.58), para três diferentes condições iniciais. Vê-se que em todos os casos não há vibração e sim um retorno lento à posição de equilíbrio, devido ao valor elevado do amortecimento.

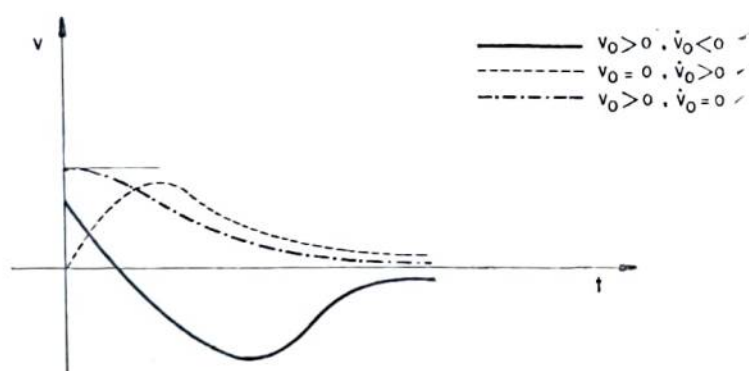



Fig. 2.17. Gráfico de um movimento "superamortecido", para três condições iniciais distintas

Os casos da prática não seguem em geral esta situação, devido à grande dissipação de energia no amortecimento.

3º caso - $\xi = 1$: Este caso marca a transição entre um movimento subamortecido e superamortecido. Na expressão (2.49), as raízes, agora, são reais e iguais e a solução toma a forma:

$$v = (c_1+c_2 t)e^{-\omega_0 t} \tag{2.59}$$

Aplicando-se as mesmas condições iniciais, já utilizadas nos casos anteriores, segue-se a solução final:

$$v = e^{-\omega_0 t}[v_0+(\dot{v}_0+\omega_0 v_0)t] \tag{2.60}$$

O amortecimento crítico representa o limite para movimento não-periódico e, consequentemente, o movimento retorna ao repouso, no menor prazo, sem qualquer oscilação, como mostra a fig. 2.18.

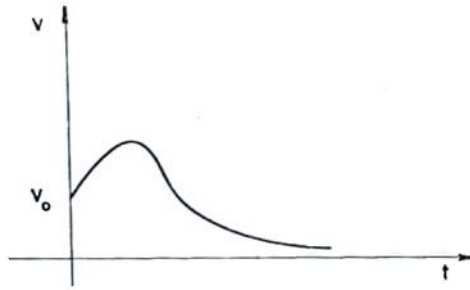



Fig. 2.18. Vibração livre para S1GL com amortecimento crítico

As partes móveis de muitos medidores elétricos e instrumentos de medida são projetadas empregando-se o amortecimento crítico, para tirar vantagem dessa propriedade.

d) Significado do Amortecimento Crítico e Coeficiente de Amortecimento

O significado do amortecimento crítico é mostrado através da seguinte expressão:

$$\xi = \frac{c}{2\omega_0 m} \tag{2.61}$$

Quando o valor de $\xi=1$, o amortecimento é crítico e $c_{cr}=2\omega_0 m$, portanto:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \tag{2.62}$$

A expressão (2.62) representa a fração de amortecimento em relação ao valor crítico.

Exemplo 2.15. Para a equação diferencial, obtida na eq. (2.11), do exemplo 2.1, não considerando a força externa F(t), pode ser

obtido o valor do amortecimento crítico, como é visto abaixo:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}\left(\frac{B}{L}\right)^2 \dot{v} + \frac{k}{m}\left(\frac{A}{L}\right)^2 v = 0$$

$$\therefore \; 2\xi\omega_o = \frac{c}{m}\left(\frac{B}{L}\right)^2 \quad e \quad \omega_o = \frac{A}{L}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad ,$$

logo, para $\xi=1$, vem

$$c_{cr} = \frac{2\omega_o m}{\left(\frac{B}{L}\right)^2} = \frac{2AL}{B^2}\sqrt{km} \qquad (2.63)$$

e) Determinação Experimental do Coeficiente de Amortecimento

A expressão (2.55), para $\xi<1$, que é o caso das estruturas em geral, foi registrada com a forma seguinte:

$$v_t = e^{-\xi\omega_o t} C \cos(\omega_a t - \alpha) \qquad (2.64)$$

onde C e α são constantes.

Da fig. 2.19,que representa o gráfico deste movimento oscilatório, pode-se escrever o seguinte:

- Para $t=t_n$ .... $v_n = e^{-\xi\omega_o t_n} C$
- Para $t=t_{n+1}$ .... $v_{n+1} = e^{-\xi\omega_o t_{n+1}} C$ e ainda

$$t_{n+1} - t_n = T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \quad \text{(pseudo-período)} \quad \therefore$$

$$v_{n+1} = C\, e^{-\xi\omega_o\left(t_n + \frac{2\pi}{\omega_a}\right)} = C\, e^{-\xi\omega_o t_n}\, e^{-2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad ,$$

e assim:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = e^{2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad (2.64)$$

É interessante observar o rápido decrescimento da relação v_{n+1}/v_n, com o crescimento de ξ. Salienta-se que este valor não ultrapassa a unidade, no caso em questão.

Aplicando-se logaritmo neperiano em ambos os membros da expressão (2.64), obtêm-se:

$$\delta = \ln \frac{v_n}{v_{n+1}} = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (2.65)$$

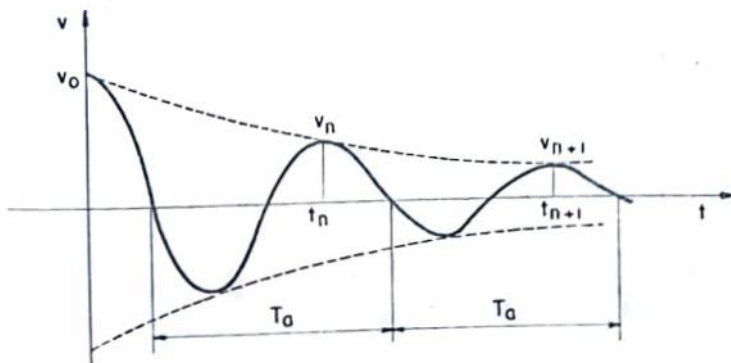



Fig. 2.19. Gráfico da resposta subamortecida - S1GL

Verifica-se que δ, denominado "decremento logaritmo", é independente do tempo e, portanto, útil na determinação do valor do coeficiente de amortecimento, ξ.

Para baixos valores de ξ, não é fácil medir o decremento com precisão e, neste caso, pode-se tomar a relação v_n/v_{n+k}, como:

$$\frac{v_n}{v_{n+k}} = \frac{v_n}{v_{n+1}} \cdot \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} \quad \cdots \quad \frac{v_{n+k-2}}{v_{n+k-1}} \cdot \frac{v_{n+k-1}}{v_{n+k}} \; ,$$

para k valores consecutivos.

Como todas as parcelas da multiplicação da expressão anterior, são constantes e iguais a δ, então:

$$\frac{v_n}{v_{n+k}} = (e^{\delta})^k \therefore \quad \ell n \frac{v_n}{v_{n+k}} = k \cdot \delta \therefore$$

$$\therefore \delta = (\ell n\, v_n - \ell_n\, v_{n+k})/k \tag{2.66}$$

Pode-se também usar a aproximação $\sqrt{1-\xi^2} \cong 1$ na expressão (2.65) e assim:

$$\ell n \frac{v_n}{v_{n+1}} = \delta \cong 2\pi\xi \tag{2.67}$$

Uma outra aproximação é derivada da anterior, ou seja:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \cong e^{2\pi\xi}$$

Desenvolvendo-se expressão anterior em série de Taylor e desprezando-se os termos do 2º grau em diante, vem:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \cong 1 + 2\pi\xi$$

$$\therefore \xi = \frac{v_n - v_{n+1}}{2\pi v_{n+1}} \tag{2.68}$$

A fig. 2.20 mostra a relação entre o valor do coeficiente de amortecimento aproximado, com a utilização das expressões (2.67) e (2.68) e o valor exato obtido na expressão (2.65).

Nota-se que a aproximação (2.67) é bem melhor do que a

(2.68) e que praticamente coincide com a exata, podendo ser usada nos casos práticos de dinâmica estrutural, sem maior esforço de cálculo.

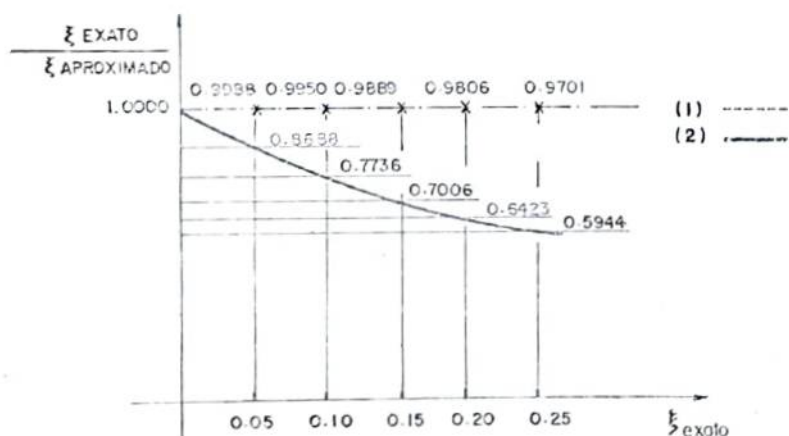



Fig. 2.20. Fator de correção para os coeficientes de amortecimento aproximados pelas expressões (2.67)-curva (1) e (2.68)-curva (2)

O coeficiente de amortecimento pode ainda ser determinado das seguintes maneiras:

- amplitude de vibração forçada em condições de ressonância;
- defasagem entre a força periódica e a resposta do sistema;
- ciclos de histerese.

2.3.3. Vibração Forçada sem Amortecimento

2.3.3.1. Equação de Movimento-Solução

A fig. 2.21 mostra os gráficos de uma excitação qualquer, ao longo do tempo, e o respectivo deslocamento estático, considerando-se um sistema de massa simples como o da fig. 2.12.

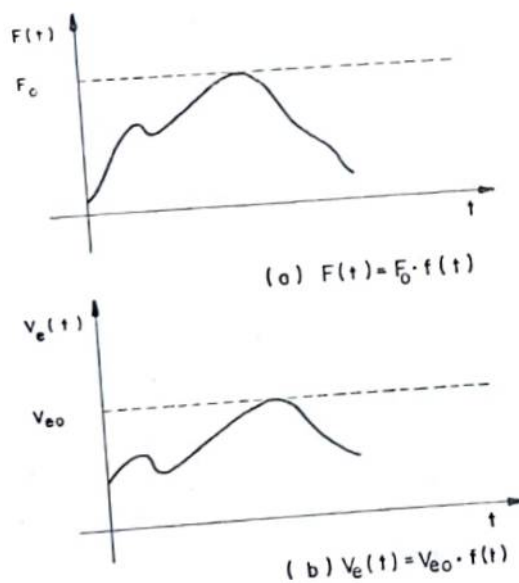



Fig. 2.21. Excitação qualquer F(t) e seu respectivo deslocamento estático, para o sistema de massa simples

A equação geral (2.1) é agora apresentada de forma mais adequada, como se segue:

$$\ddot{v} + 2\xi\omega_o\dot{v} + \omega_o^2 v = F_o \; f(t) k/mk \tag{2.69}$$

$$\ddot{v} + 2\xi\omega_o\dot{v} + \omega_o^2 v = \omega_o^2 v_{eo} f(t) \; , \tag{2.70}$$

onde $v_{eo} = \frac{F_o}{k}$.

A solução da equação diferencial (2.70) é dada por uma soma da solução homogênea, expressão (2.53), e a particular, a qual depende da excitação considerada. Então:

$$v = v_H + v_P \tag{2.71}$$

Define-se fator de amplificação instantânea(FAI), ou fa-

tor de carga dinâmica (FCD), da seguinte forma:

$$FAI = v/v_{eo} \tag{2.72}$$

a) Carga Retangular

a.1) Solução Geral

A equação, para este tipo de problema (fig. 2.22), é apresentada abaixo.

$$\ddot{v} + 2\xi\omega_o\dot{v} + \omega_o^2 v = \omega_o^2 \cdot v_{eo} \tag{2.73}$$

$f(t) = 1 \quad t > 0$
$f(t) = 0 \quad t < 0$

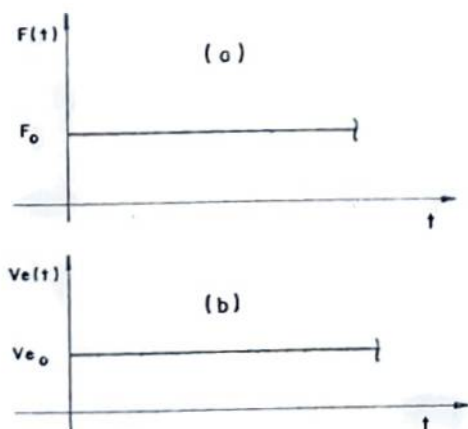



Fig. 2.22. Carga retangular

A solução é obtida com auxílio da expressão (2.71) e assim:

$$v = e^{-\xi\omega_o t}[A \cos \omega_a t + B \text{ sen } \omega_a t] + v_{eo} ,$$

onde v_{eo} é a solução particular.

As condições iniciais são, para t=0, as seguintes:

$$v(0) = v_o = 0 \quad \text{e} \quad \dot{v}(0) = \dot{v}_o = 0$$

e então:

$$A = -v_{eo} \quad e \quad B = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} v_{eo}$$

e assim:

$$v = v_{eo}[1-e^{-\xi\omega_0 t}(\cos \omega_a t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_a t)] \qquad (2.74)$$

caráter permanente | caráter transiente

A solução geral do problema possui, sempre, resposta nos estados permanente e transiente que são responsáveis, respectivamente, pelas soluções particular e homogênea. A fig. 2.23 mostra essa característica, considerando-se uma carga retangular.

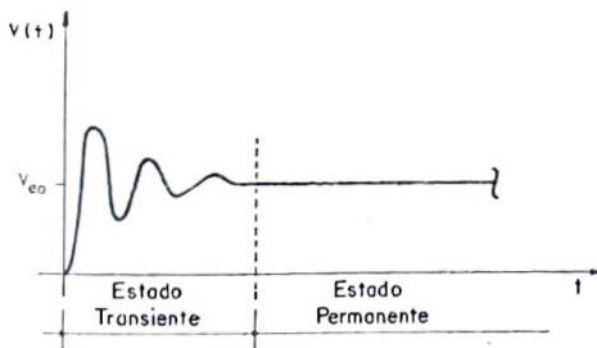



Fig. 2.23. Esboço da solução para carga retangular

Nota-se, pela expressão (2.74), que a resposta transiente é ditada pelo coeficiente de amortecimento, ξ e pela frequência natural, ω_0 .

Fazendo-se $\xi=0$, na expressão (2.74), tem-se:

$$v = v_{eo}[1-\cos \omega_0 t] \qquad (2.75)$$

$$\therefore \ FAI = [1 - \cos \omega_o t] \qquad (2.76)$$

A fig. 2.24 mostra o F.A.I. ao longo do tempo.

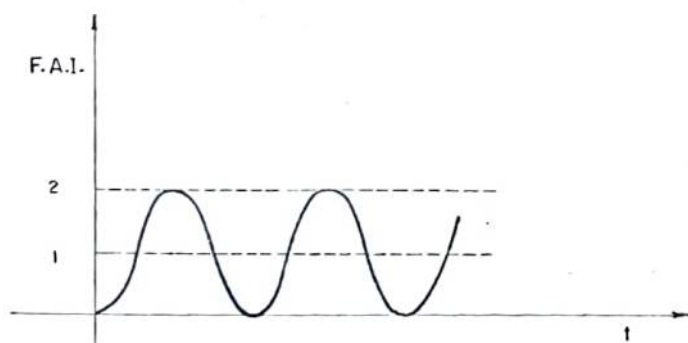



Fig. 2.24. Fator de amplificação instantânea (F.A.I.) para carga retangular, $\xi=0$

Se uma carga é aplicada abruptamente, o sistema de amortecimento não consegue ter influência marcante na resposta.

Na consideração de $\xi=0$, há o interesse no estudo das cargas súbitas ou simplesmente pulsos, que são de curta duração, isto é, uma parcela pequena do período do sistema.

a.2) Pulso Retangular

A fig. 2.25 ilustra um pulso retangular com a duração $t=t_1$. Dois intervalos devem ser considerados, do seguinte modo:

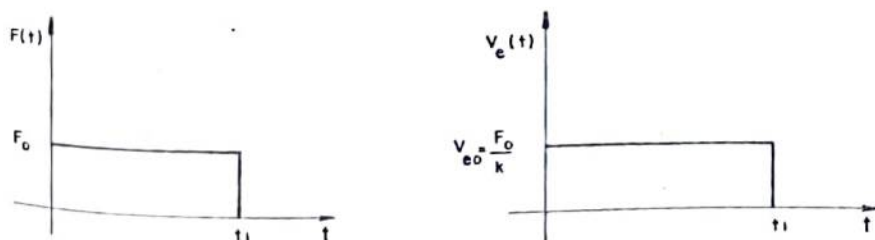



Fig. 2.25. Pulso retangular

a) $0 \leq t \leq t_1$: A solução é a mesma registrada na expressão (2.76), e escrevendo-a de uma outra forma, tem-se:

$$F_{AT} = \frac{v}{v_{eo}} = [1 - \cos \frac{2\pi}{T_0} t] \quad \xi = 0 \qquad (2.77)$$

b) $t \geq t_1$: A vibração é livre e a equação diferencial agora é dada como:

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v = 0$$

As condições iniciais são as seguintes:

$$v(t_1) = v_{t_1} = v_{eo}[1 - \cos \omega_0 t_1] \qquad e$$

$$\dot{v}(t_1) = \dot{v}_{t_1} = \omega_0 \, v_{eo} \text{ sen } \omega_0 t_1$$

A solução da equação diferencial deve ser obtida da seguinte maneira:

vibração livre

$$v = v_{t_1} \cos \omega_0 t' + \frac{\dot{v}_{t_1}}{\omega_0} \text{ sen } \omega_0 t' \quad , \text{ para } t' = t - t_1$$

$$\therefore v = v_{eo}[1 - \cos \omega_0 t_1] \cos \omega_0 t' + v_{eo} \text{ sen } \omega_0 t_1 \text{ sen } \omega_0 t' =$$

$$= v_{eo}(2 \text{sen}^2 \frac{\omega_0 t_1}{2} \cos \omega_0 t' + 2 \text{sen} \frac{\omega_0 t_1}{2} \cos \frac{\omega_0 t_1}{2} \text{ sen } \omega_0 t') =$$

$$= 2 v_{eo} \text{ sen } \frac{\omega_0 t_1}{2} (\text{sen } \frac{\omega_0 t_1}{2} \cos \omega_0 t' + \cos \frac{\omega_0 t_1}{2} \text{ sen } \omega_0 t') =$$

$$= 2 v_{eo} \text{ sen } \frac{\omega_0 t_1}{2} \text{ sen}(\frac{\omega_0 t_1}{2} + \omega_0 t') =$$

$$= 2 v_{eo} \text{ sen } \frac{\omega_0 t_1}{2} \text{ sen}[\omega_0 (t - \frac{t_1}{2})]$$

$$\therefore FA = 2 \text{sen} \frac{\pi t_1}{T_0} \text{ sen}[\omega_0 (t - \frac{t_1}{2})] \qquad (2.78)$$

$$F_A\Big|_{\substack{max \\ t>t_1}} = \frac{v_{max}}{v_{eo}} = 2sen\,\frac{\pi t_1}{T_0} \tag{2.79}$$

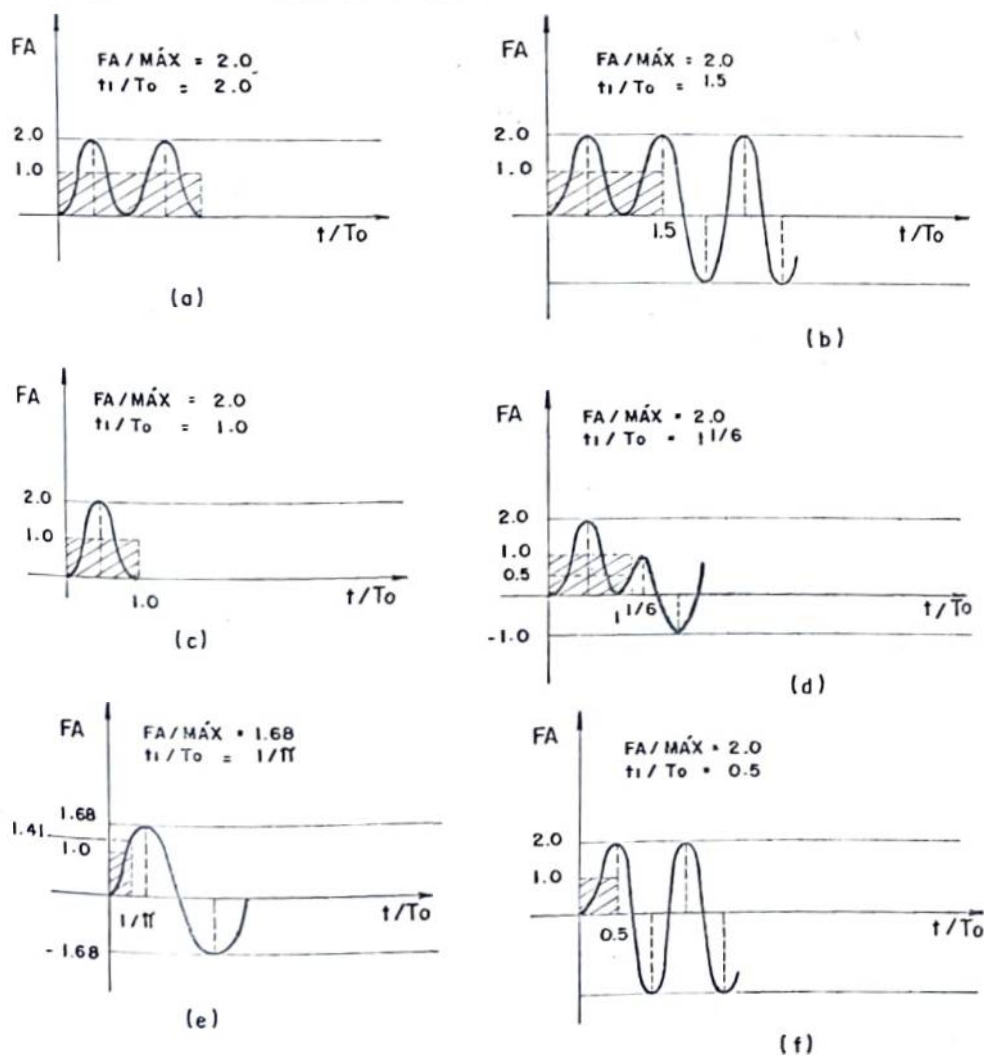



Fig. 2.26. Variação do fator de amplificação com (t/T_0), para al guns pulsos retangulares

A fig. 2.26 mostra a variação do fator de amplificação com a relação t/T_0, para alguns pulsos representados por t_1/T_0. As expressões (2.77), (2.78), (2.79) foram usadas.

Pode-se observar, nas partes (a) até (d) da figura, que o primeiro valor de F_A/max ocorre durante o pulso e na parte (e), após o pulso. Em (f) o valor de F_A/max ocorre no final do pulso.

A tabela 2.1 mostra os valores de F_A no final do pulso e F_A/max após o pulso, variando-se o valor de t_1/T_0.

$\frac{t_1}{T_0}$	2.0	1.5	1 1/6	1	$1/\pi$	0.5
$F_A\|_{(t_1/T_0)}$	0	2.0	0.5	0	1.415	2.0
$F_A\|_{max}$ $t>t_1$	0	2.0	1.0	0	1.683	2.0

Tabela 2.1. Fatores de amplificação para pulso retangular

O "espectro de resposta" pode então ser obtido para pulsos retangulares, fig. 2.27. O "espectro" reune parâmetros de frequência e resposta máxima para S1GL para um carregamento dado.

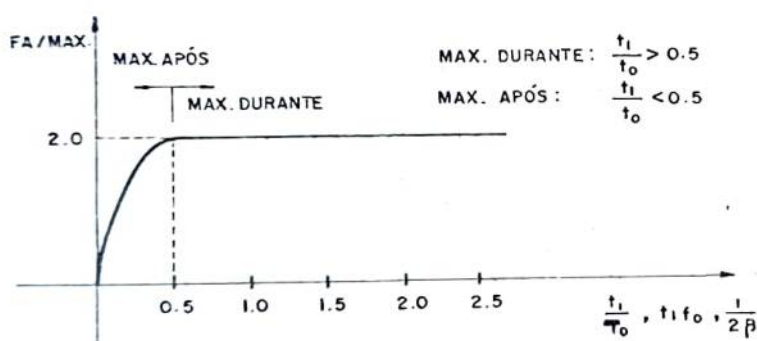



Fig. 2.27. Espectro de resposta para pulsos retangulares

Convém mencionar que como os deslocamentos, forças elásticas e tensões são todas proporcionais, o fator de amplificação pode ser aplicado a qualquer dessas grandezas para se obter

a relação do efeito dinâmico para o estático.

Um exemplo interessante para aplicação do assunto é a obtenção do espectro para o pulso triangular, fig. 2.28a.

b) Carga Senoidal

O problema é solucionado, a seguir, na mesma sequência em que foi apresentada a carga retangular, ou seja, considerando-se inicialmente o sistema com amortecimento e uma particularização para o caso de pulso em seguida.

A equação diferencial para a carga externa senoidal, mostrada na fig.2.28b, é a seguinte:

f(t) = sen ωt

$$\ddot{v} + 2\xi\omega_0\dot{v} + \omega_0^2 v = \frac{1}{m} F_0 \text{ sen } \omega t \quad \therefore$$

$$\ddot{v} + 2\xi\omega_0\dot{v} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 \, v_{eo} \text{ sen } \omega t \tag{2.80}$$

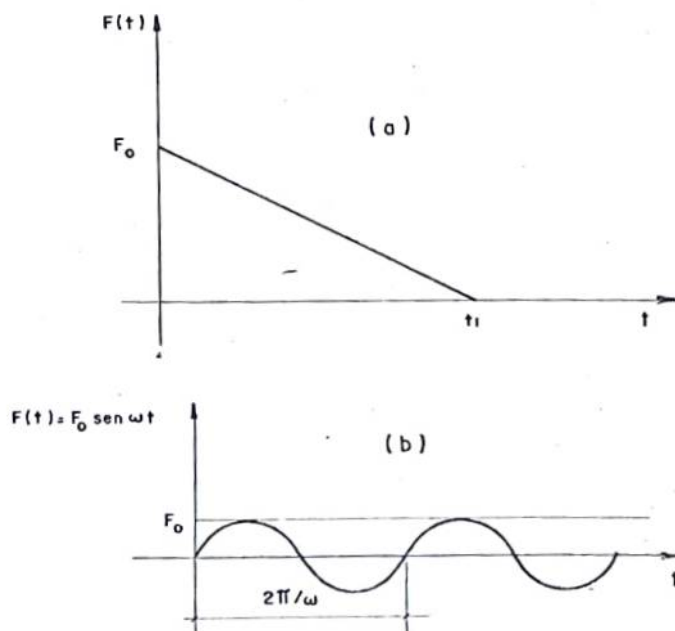



Fig. 2.28. (a) pulso triangular; (b) carga senoidal

A solução é dada da mesma forma que a expressão (2.71), onde v_H segue a expressão (2.53) e v_p é dada por:

$$v_p = M \text{ sen } \omega t + N \cos \omega t \qquad (2.81)$$

Substituindo-se a expressão (2.81) na equação (2.80), vem:

$$(-\omega^2 M \text{ sen } \omega t - \omega^2 N \cos \omega t) + 2\xi\omega_0(\omega M \cos \omega t - \omega N \text{ sen } \omega t) +$$

$$+\omega_0^2 (M \text{ sen } \omega t + N \cos \omega t) = \omega_0^2 v_{eo} \text{ sen } \omega t$$

$$\therefore \left[\begin{array}{l} (\omega_0^2 - \omega^2) M - 2\xi\omega_0 \omega N = \omega_0^2 v_{eo} \\ 2\xi\omega_0 \omega M + (\omega_0^2 - \omega^2) N = 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore M = v_{eo} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2} \quad \text{e} \quad N = -v_{eo} \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2} \qquad (2.82)$$

onde $\beta = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ (2.83)

A solução global é a seguinte:

$$v = e^{-\xi\omega_0 t}(A \cos \omega_a t + B \text{ sen } \omega_a t) + \frac{v_{eo}}{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2} [(1-\beta^2) \text{sen } \omega t - 2\xi\beta \cos \omega t] \qquad (2.84)$$

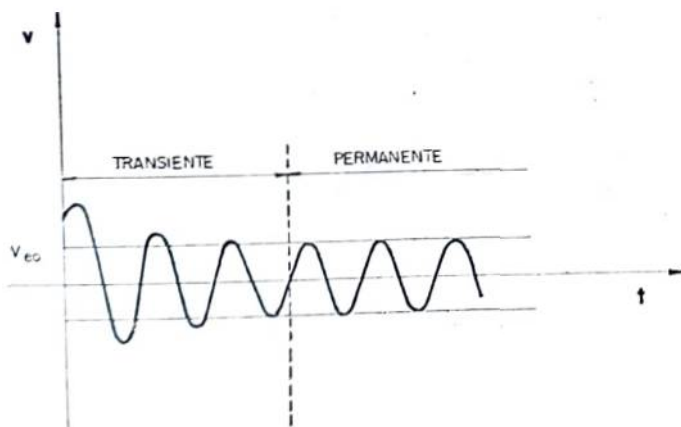



Fig. 2.29. Esboço da solução para carga senoidal

A figura 2.29 mostra a parte transiente, associada à solução homogênea e a permanente, dada pela solução particular.

Se o valor de ξ na expressão (2.84) é nulo, tem-se:

$$v = A \cos \omega_o t + B \operatorname{sen} \omega_o t + \frac{v_{eo}}{1-\beta^2} \operatorname{sen} \omega t \qquad (2.85)$$

b.1) Pulso Senoidal

Seja o pulso com meia senóide, fig. 2.30.

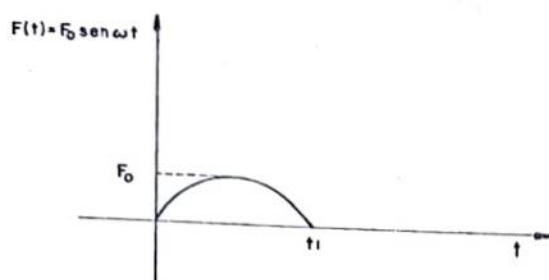



Fig. 2.30. Pulso senoidal

Na expressão (2.85), sendo dadas as condições iniciais $v(0)=v_o=0$ e $\dot{v}(0)=\dot{v}_o=0$, para $t \leq t_1$, tem-se:

$$F_A = \frac{v}{v_{eo}} = \frac{1}{1-\beta^2} [\operatorname{sen} \omega t - \beta \operatorname{sen} \omega_o t], \qquad (2.86)$$

onde:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_o} \quad , \quad \text{mas} \quad t_1 = \pi/\omega \quad \text{ou} \quad \omega = \pi/t_1$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{\pi/t_1}{2\pi/T_o}$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{T_o}{2t_1} \qquad (2.87)$$

Substituindo-se a expressão (2.87) em (2.86), obtém-se:

$$F_A = \frac{1}{1-(\frac{T_o}{2t_1})^2} [\text{sen } \frac{\pi t}{t_1} - \frac{T_o}{2t_1} \text{ sen } \frac{2\pi t}{T_o}] \qquad (2.88)$$

Para $t>t_1$ a vibração é livre e a solução é a seguinte,com $t'=t-t_1$:

$v(t')=c_1 \cos \omega_o t'+c_2 \text{sen } \omega_o t'$, com $v(t'=0)=v_{t_1}$ e $\dot{v}(t'=0)=\dot{v}_{t_1}$

$$\therefore \quad v=v_{eo} \frac{2\beta}{\beta^2-1} \cos \frac{\omega_o t_1}{2} \cos(\omega_o t'-\alpha) \quad , \qquad (2.89)$$

onde:

$$tg\ \alpha = \frac{1+\cos \omega_o t_1}{\text{sen } \omega_o t_1}$$

Desenvolvendo-se a expressão (2.89), tem-se:

$$F_A = \frac{\frac{t_1}{T_o} \cos(\pi \frac{t_1}{T_o})}{1/4-(\frac{t_1}{T_o})^2} \text{sen}[2\pi(t/T_o-t_1/2T_o)] \quad , \text{ ou:}$$

$$F_A = \overline{F_A} \text{ sen}[2\pi(t/T_o-t_1/2T_o)] \qquad (2.90)$$

onde

$$\overline{F_A} = \frac{t_1/T_o \cos(\pi t_1/T_o)}{1/4-(t_1/T_o)^2} = F_A\Big|_{MAX} \qquad (2.91)$$

- Valores máximos do fator de amplificação - F_A/max:

a) $t \leq t_1$

Da expressão (2.86), com algumas modificações, obtém-se:

$$F_A = \frac{1}{1-\beta^2} \left[\operatorname{sen} 2\pi\beta \frac{t}{T_o} - \beta \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T_o}\right]$$ 2.86 modificada.

O valor máximo para o fator de amplificação é obtido, derivando-se a expressão acima em relação a t/T_o e igualando-se o resultado a zero, isto é:

$$\frac{dF_A}{d(t/T_o)} = \frac{2\pi\beta}{1-\beta^2} \left(\cos 2\pi\beta \frac{t}{T_o} - \cos 2\pi \frac{t}{T_o}\right) = 0$$

$$\therefore \cos 2\pi\beta \frac{t}{T_o} = \cos 2\pi \frac{t}{T_o} \quad \Rightarrow \quad 2\pi\beta \frac{t}{T_o} = \pm 2\pi \frac{t}{T_o} + 2\pi \cdot n$$

$$\therefore \frac{t}{T_o} = \frac{n}{\frac{T_o}{2t_1} \mp 1} \quad , \quad n=0,1,2,... \qquad (2.92)$$

i) $\frac{t}{T_o} = \frac{n}{\frac{T_o}{2t_1} - 1} \leq \frac{t_1}{T_o}$

$$\frac{t}{T_o} = \frac{n}{\beta+1} \rightarrow FA|_{max}$$

$$\frac{2n \frac{t_1}{T_o}}{1 - 2\frac{t_1}{T_o}} \leq \frac{t_1}{T_o} \quad \therefore \quad n \leq \frac{1}{2} - \frac{t_1}{T_o} \quad \therefore \quad n = 0 \rightarrow \frac{t}{T_o} = 0$$

(que é uma solução trivial, o ponto na origem, com $F_A=0$).

ii) $$\frac{t}{T_o} = \frac{n}{\frac{T_o}{2t_1} + 1} = \frac{n}{\beta+1} \quad , \quad n=1,2,... \qquad (2.93)$$

Os valores de F_A/max são dados pela substituição da ex-

pressão (2.93) em (2.88), obtendo-se:

$$F_A/max = \frac{1}{1-\left(\frac{T_o}{2t_1}\right)^2}\left[sen\left(\frac{\pi T_o}{t_1} \cdot \frac{n}{\frac{T_o}{2t_1}+1}\right) - \frac{T_o}{2t_1} sen\left(2\pi \frac{n}{\frac{T_o}{2t_1}+1}\right)\right] \quad (2.94)$$

A partir das expressões (2.94) e (2.91) pode ser construída a tabela 2.2, acompanhada das configurações dadas na fig. 2.31, servindo de auxílio à melhor compreensão do problema.

t_1/T_o	n=1		n=2		n=3		n=4		$\overline{F_A}$	MÁXIMO
	t/T_o	F_A/max	t/T_o	F_A/max	t/T_o	F_A/max	t/T_o	F_A/max		
5.000	0.909	0.601	1.818	1.011	2.727	1.100	3.636	0.839	0.202	1.100 durante
2.500	0.833	1.083	1.667	1.083	2.500	0	-	-	0	1.083 durante
2.000	0.800	1.268	1.600	0.784	2.400	0	-	-	0.533	1.268 durante
1.500	0.750	1.500	1.500	0	-	-	-	-	0	1.500 durante
1.000	0.667	1.732	1.333	0	-	-	-	-	1.333	1.732 durante
0.750	0.600	1.763	1.250	0	-	-	-	-	1.697	1.763 durante
0.125	0.200	0.317	-	-	-	-	-	-	0.493	0.493 após

Tabela 2.2. Fatores de amplificação máxima para pulso senoidal

Pode-se notar que o máximo valor de F_A/max ocorre para $\frac{t_1}{T_o} < 1.000$ e para n=1, sua determinação é feita como se segue:

a) $t < t_1$

Neste caso fazendo n=1, na expressão (2.94), tem-se:

$$F_A\Big|_{max} = \frac{1}{1-\left(\frac{T_o}{2t_1}\right)^2}\left[\text{sen}\ \frac{\pi}{t_1}\ \frac{T_o}{\left(\frac{T_o}{2t_1}\right)+1} - \left(\frac{T_o}{2t_1}\right)\text{sen}\ \frac{2\pi}{\left(\frac{T_o}{2t_1}\right)+1}\right]$$

ou ainda:

$$F_A\Big|_{max} = \frac{1}{1-\beta^2}\left[\text{sen}\ \frac{2\pi\beta}{\beta+1} - \beta\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{\beta+1}\right] \qquad (2.95)$$

p/ n = 1

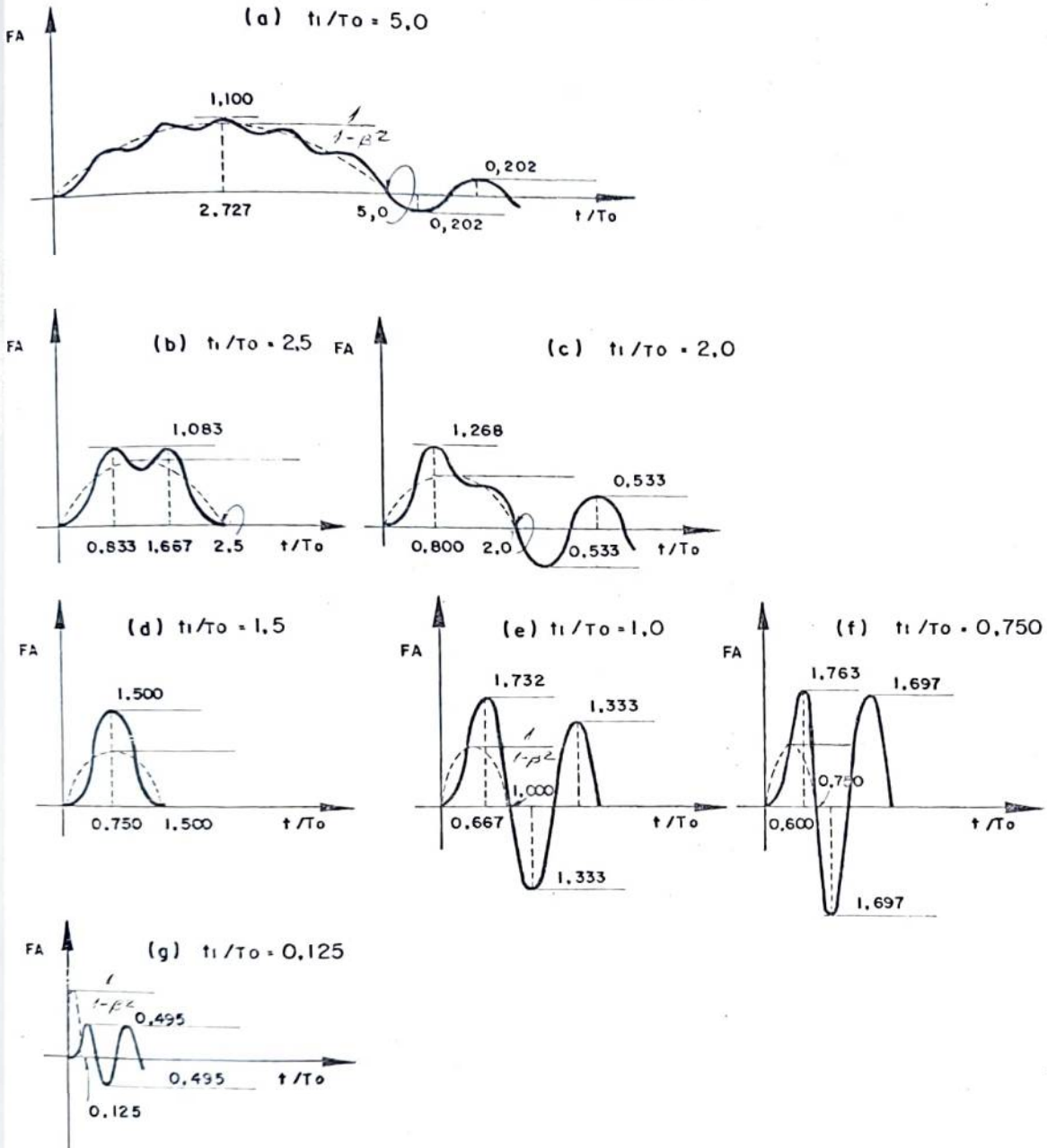



Fig. 2.31. Variação do fator de amplificação com $(\frac{t}{T_o})$ para pulsos senoidais

Derivando-se a expressão (2.95) em relação a β e igualando-se a zero o seu resultado, vem:

$$\frac{dF_A}{d\beta} = (1-\beta^2)\left[\frac{2\pi}{(\beta+1)^2}\cos\frac{2\pi\beta}{\beta+1} - \text{sen}\,\frac{2\pi}{\beta+1} + \frac{2\pi\beta}{(\beta+1)^2}\cos\frac{2\pi}{\beta+1}\right] +$$

$$+ 2\beta\left[\text{sen}\,\frac{2\pi\beta}{\beta+1} - \beta\ \text{sen}\,\frac{2\pi}{\beta+1}\right] = 0$$

A equação acima é resolvida iterativamente, variando-se os valores de β, e o valor encontrado é o seguinte:

$$\beta = 0.625 \quad \text{ou} \quad \frac{t_1}{T_0} = 0.8$$

Levando-se esse resultado até a expressão (2.95) obtém-se:

$$[F_A]/max = 1.768 \quad \text{(máximo maximorum)}$$

b) $t \geq t_1$

Derivando-se a expressão (2.91) em relação a $(\frac{t_1}{T_0})$ e igualando-se a zero o resultado tem-se:

$$\frac{t_1}{T_0} = 0.685 \quad \text{e} \quad \overline{FA}/max = 1.716$$

O valor da máxima ordenada portanto, ocorre durante o pulso ($t \leq t_1$) para $\frac{t_1}{T_0} = 0.8$ com $[F_A]/max = 1.768$.

→ p/ n=1 $\frac{t}{T_0} = \frac{n}{\beta+1}$

Para $\frac{t_1}{T_0} = 0.5$, ou $\beta = 1$, tem-se $\frac{t}{T_0} = \frac{1}{2}$ e o valor de $F_{A_{max}}$ na expressão (2.95) torna-se "$\frac{0}{0}$", que é uma indeterminação.

Com a aplicação do teorema de L'Hôpital, supera-se este tipo de problema, como é mostrado a seguir.

$$\left.\frac{\frac{d}{d\beta}\left[\operatorname{sen} 2\pi\beta \left(\frac{t}{T_0}\right) - \beta \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T_0}\right)\right]}{\frac{d}{d\beta}\,(1-\beta^2)}\right|_{\beta=1} = \frac{\pi}{2} \cong 1.57$$

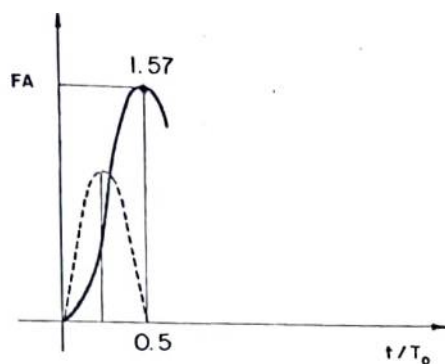



Fig. 2.32. Pulso senoidal com $\frac{t_1}{T_0} = 0.5$

A fig. 2.32 ilustra o caso do pulso com $\frac{t_1}{T_0} = 0.5$. Nota-se que o máximo ocorre no fim da meia onda, isto é, o máximo durante é igual ao máximo após.

O "espectro de resposta" obtido é mostrado na fig. 2.33.

Durante o pulso o sistema comporta-se como rígido e após como flexível ($\frac{t_1}{T_0} \rightarrow 0$).

No trecho praticamente linear, com $0 < \frac{t_1}{T_0} < 0.25$, o sistema é muito flexível, ocorrendo uma excitação impulsiva, como é visto em seguida.

$m\ddot{v}+kv=F$, vibração livre com $\dot{v}_0 = d\dot{v}$ e cuja solução é: $v = \frac{\dot{v}_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t$ (2.96)

mas $k \cong 0$ $\therefore$ $m\ddot{v} = F$ $\therefore$ $d\dot{v} = \frac{F}{m}\,dt$

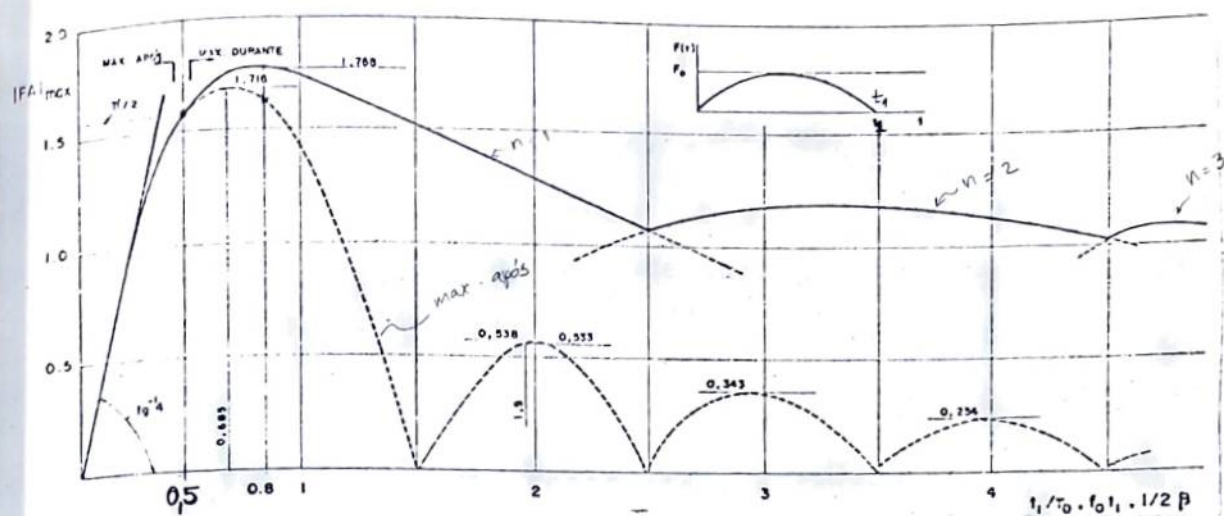



Fig. 2.33. Espectro de resposta para força de meia onda senoidal, S1GL - $\xi=0$

Anotações :

Na solução (2.96), $\dot{v}_o = d\dot{v}$ para "v=dv, então:

$$dv = \frac{d\dot{v}}{\omega_o} \text{ sen } \omega_o t \quad \therefore \quad dv = \frac{Fdt}{m\omega_o} \text{ sen } \omega_o t$$

O valor do impulso, Fdt, pode ser calculado pela área sob o pulso. A fig. 2.34 mostra um pulso genérico e sua área é dada por:

$Fdt = \alpha F_o t_1$, sendo α uma constante que depende do pulso. Para pulsos retangulares, triangulares e com meia senóide, por exemplo α tem, respectivamente, os valores de 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{\pi}$.

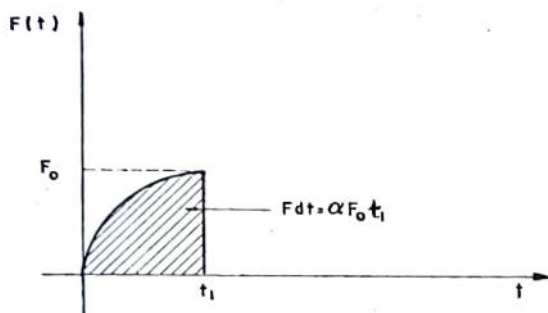



Fig. 2.34. Cálculo do impulso para pulsos de baixíssima duração

Utilizando-se do fato anterior, segue-se:

$$dv = \frac{\alpha F_o t_1}{m \omega_o} \text{ sen } \omega_o t \quad \therefore \quad dv = \frac{\alpha F_o t_1 \omega_o}{k} \text{ sen } \omega_o t$$

sendo $\frac{F_o}{k} = v_{eo}$ e $\omega_o = 2\pi f_o$, então:

$$\frac{dv}{v_{eo}} = d_{F_A} = 2\pi\alpha(f_o t_1)$$

$$\frac{d_{F_A}}{f_o t_1} = 2\pi\alpha \qquad (2.97)$$

(este é o valor da tangente no trecho linear no início do espectro).

Para o pulso de meia onda senoidal, o valor α é $\frac{2}{\pi}$ e então a tangente é igual a 4, que pode ser visto na fig. 2.33.

Para uma sucessão ilimitada de pulsos com meia senóide, o espectro de respostas é representado em função do parâmetro β. Sua envoltória é mostrada na fig. 2.35.

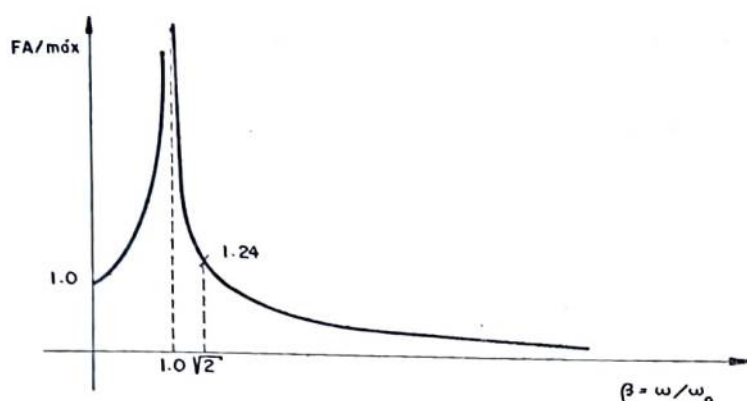



Fig. 2.35. Variação de F_A/max com β, para ξ=0

Para o caso de meia onda senoidal foi mostrado que $F_A/max(\beta=1)=\pi/2$.

Agora, considerando-se m meias ondas senoidais, como na fig. 2.36, para β=1, tem-se:

$$F_A| \cong m\,\frac{\pi}{2} \quad , \quad m=1,2,... \tag{2.98}$$

É interessante notar que o fator de amplificação, na frequência de ressonância, só tende a infinito se o mesmo acontecer com o número de ciclos. Mas é preciso ter em mente que muitos ciclos podem ocorrer num curto espaço de tempo. Na prática, a ressonância não ocorre integralmente devido ao fato dos sistemas não serem completamente lineares. A importante conclusão é

que na frequência de ressonância, ou próxima a ela, as deflexões da estrutura ficam muito grandes e, portanto, intoleráveis.

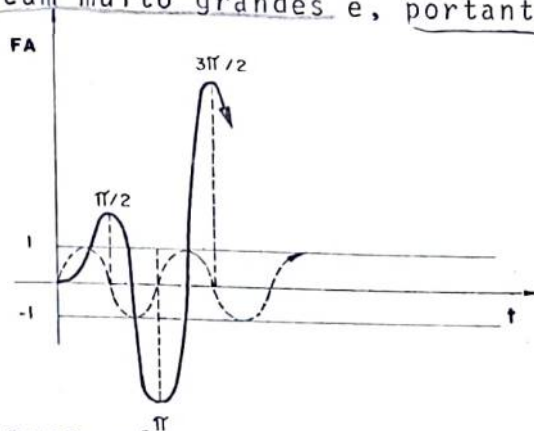



Fig. 2.36 Amplificações para n meias ondas senoidais

c) Generalização do Espectro de Resposta para Pulsos

Para um pulso genérico como o da fig. 2.39, para tr (tempo de crescimento - "rise time") e td (tempo de queda - "decay time"), o espectro de resposta pode ser generalizado por um traçado aproximado como o incluído na mesma figura.

O espectro de resposta da Fig. 2.37a mostra que com o aumento de tr o sistema tende a se comportar como estático com FA=1, caso contrário o valor de FA=2 (carga súbita).

Para pulsos da forma da fig. 2.37b3 ($tr=t_1$ e td=0) a tendência é verificar-se o máximo praticamente após o pulso, fig. 2.38. Em tais circunstâncias a regra $\overline{tr}/T_0 \geqq 2.5$ para $[FA]_{max}$ tendendo a 1, fig. 2.39, não se aplica, pois a mesma é aplicável aos casos em que o máximo ocorre durante o pulso. No caso do pulso da fig. 2.37b1, o aumento de t_1 o faz tender para a carga súbita, invalidando também a regra anterior, pois o espectro tende para 2.0. Então ela só pode ser aplicada para pulsos razoavelmente simétricos, fig. 2.37b2, escolhendo-se para $\overline{tr}$ o menor entre tr e td do pulso.

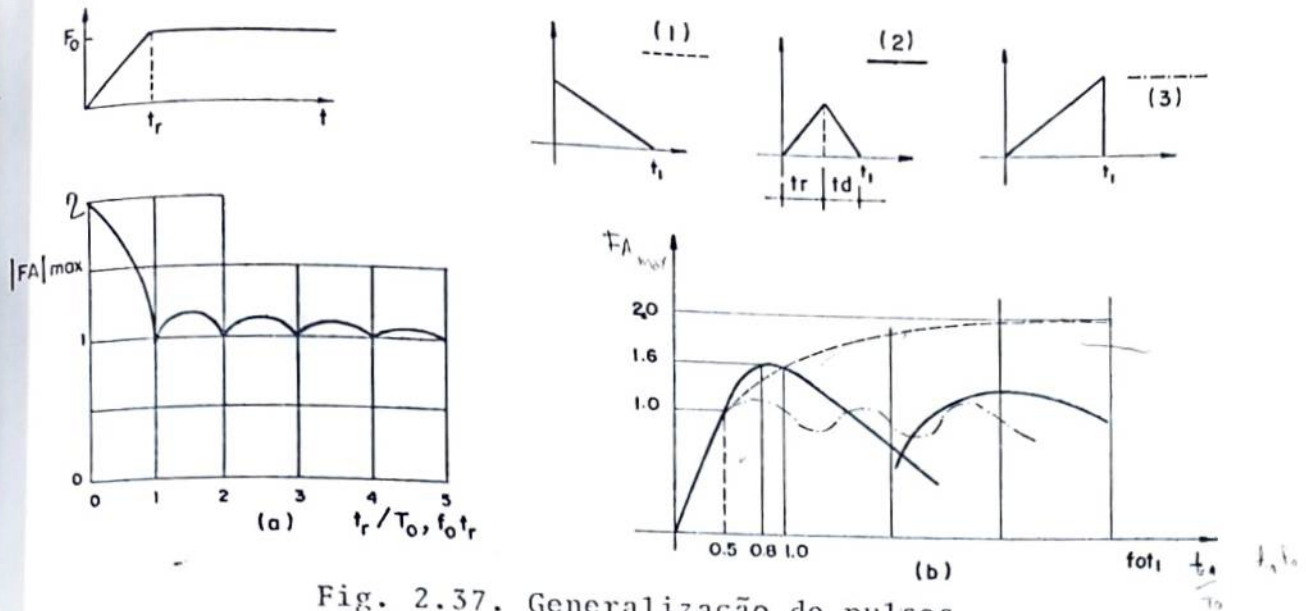



Fig. 2.37. Generalização de pulsos

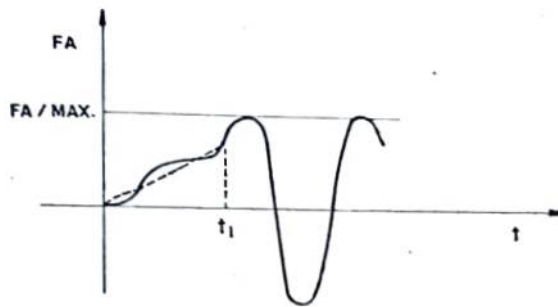



Fig. 2.38. Resposta de pulso em que td≅0

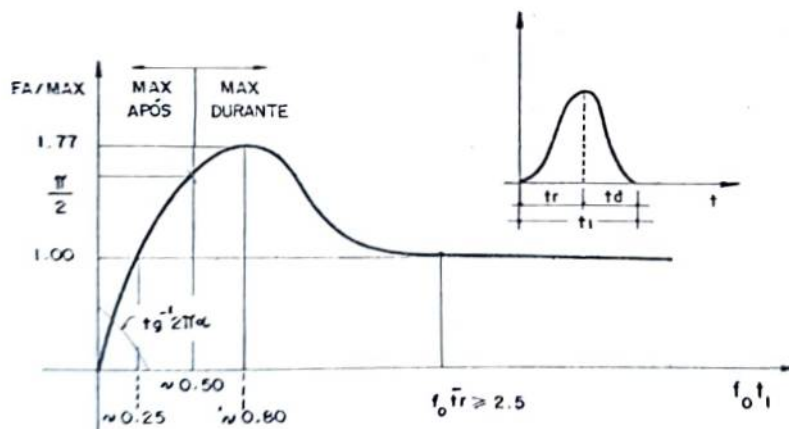



Fig. 2.39. Espectro de resposta generalizado ($\overline{tr}$ é o menor valor entre tr e td)

2.3.4. Vibração Forçada com Amortecimento (Para Carga Senoidal)

Considera-se agora que o carregamento atua permanentemente, de tal forma que o amortecimento possa ser sentido. Neste caso então, a parcela transiente, dada pela solução homogênea, desaparece da expressão (2.71) e assim a solução fica sendo:

$$v = v_p$$

$$\therefore \; v = \frac{v_{eo}}{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2}\,[(1-\beta^2)\text{sen}\,\omega t-2\xi\beta\cos\omega t] \qquad (2.99)$$

$$\therefore \; v = \frac{v_{eo}}{D}\cos(\omega t-\alpha) \quad , \qquad (2.100)$$

onde, pela fig.2.40:

$$D = \sqrt{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2} \qquad (2.101)$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1-\beta^2}{-2\xi\beta} \qquad (2.102)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad (2.103)$$

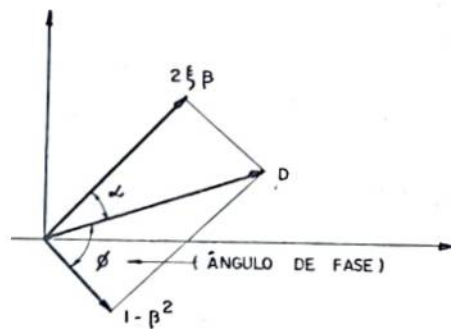



Fig. 2.40. Composição de movimento para a expressão (2.99)

Quando o valor de ξ é nulo, tem-se:

$$F_A = \frac{v}{v_{eo}} = \frac{1}{1-\beta^2}\ \text{sen}\ \omega t \quad \therefore \quad F_A/\text{max} = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad (2.104)$$

A figura 2.41 mostra o espectro, para o caso de $\xi=0$, ou seja, considerando-se a expressão (2.104). Nota-se que quando $\beta=\sqrt{2}$ o valor de F_A/max é bem próximo a 1, e não 1.24 como obtido para pulsos senoidais. Isso acontece devido ao fato da parcela transiente ser considerada para pulsos, não sendo levada em conta para vibração forçada.

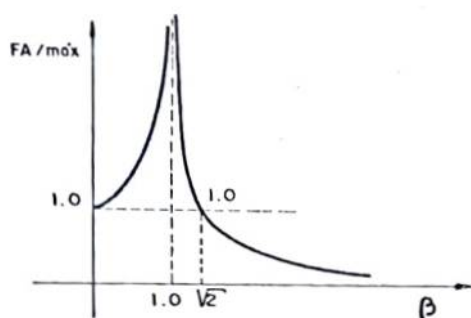
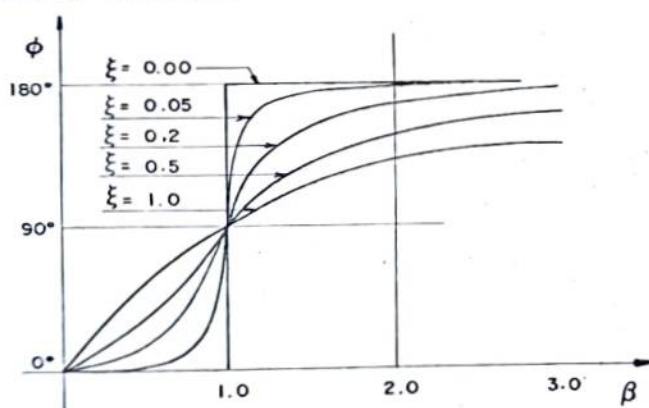



Fig. 2.41. Espectro de resposta para carga senoidal, para $\xi=0$

Na prática, $\xi=0$ não se verifica, mas é útil como indicação de uma curva limite.

$tg\alpha = \frac{1-\beta^2}{-2\xi\beta}$

$\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Fig. 2.42. Variação do ângulo de fase com os coeficientes de amortecimento e frequência

A figura 2.42 mostra a variação do ângulo de fase ϕ com os parâmetros β e ξ, utilizando-se as expressões (2.102) e (2.103).

para $\phi=0^{o}$ a resposta está em fase e para $\phi=180^{o}$ em anti-fase.

Com a consideração de $\xi\neq 0$, utilizando-se a solução(2.100), escreve-se:

$$F_A/max = \frac{1}{D} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2}} \qquad (2.105)$$

O valor máximo para F_A/max é obtido para o mínimo de D, ou de uma outra forma mais simples, que retrata a mesma consideração, com o mínimo de D^2, isto é:

$$\frac{d}{d\beta}\left[(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2\right] = 0$$

$$\therefore\; -4\beta(1-\beta^2)+8\xi^2\beta = 0 \;\therefore\; \begin{cases}\beta=0\\ \beta=\sqrt{1-2\xi^2}\end{cases}$$

$$\frac{d^2}{d\beta^2}[D^2] = -4(1-\beta^2)+8\beta^2+8\xi^2 \begin{array}{ll} > 0 & \text{(condição de mínimo)} \\ < 0 & \text{(condição de máximo)} \end{array}$$

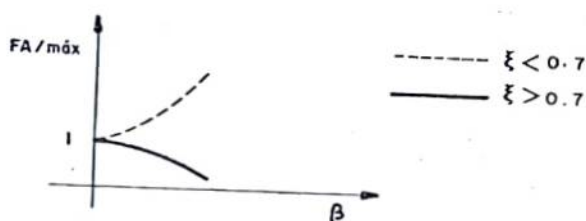



Fig. 2.43. Condições de máximo e mínimo para $\beta=0$

Para $\beta=0$ (fig. 2.43):

$$\frac{d^2}{d\beta^2}[D^2] = -4 + 8\xi^2$$

$$-4+8\xi^2 > 0 \rightarrow \xi > \sqrt{0.5} \cong 0.7 \rightarrow D_{min} \rightarrow (F_A/max)_{max}$$

$-4+8\xi < 0 \rightarrow \xi < \sqrt{0.5} \cong 0.7 \rightarrow D_{max} \rightarrow (F_A/max)_{min}$

para $\beta=0$, $F_A/max=1$

para $\beta=\sqrt{1-2\xi^2}$ (fig. 2.44) :

$$\frac{d^2}{d\beta^2}[D^2] = -8\xi^2 + 8 - 16\xi^2 + 8\xi^2 = 1 - 2\xi^2 > 0$$

$1-2\xi^2 > 0 \rightarrow \xi < \sqrt{0.5} \rightarrow D_{min} \rightarrow (F_A/max)_{max}$

$1-2\xi^2 < 0 \rightarrow \xi > \sqrt{0.5} \rightarrow$ não há $(F_A/max)_{min}$ pois seria imaginário

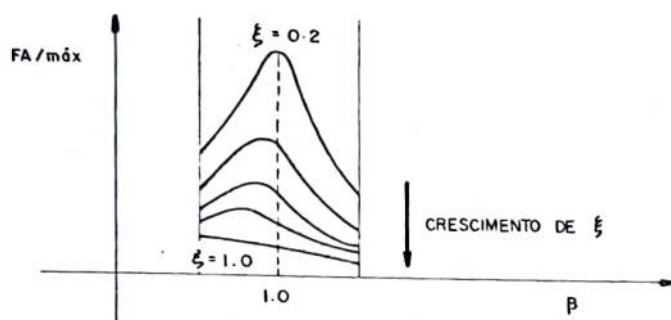



Fig. 2.44. Condições de máximo para $\beta=\sqrt{1-2\xi^2}$

O espectro pode então ser construído variando-se os valores de β e ξ, como ilustrado na fig. 2.45. Nota-se que para valores muito pequenos de ξ o valor de β tende a 1.

Quando $\beta=\sqrt{1-2\xi^2}$ tem-se que:

$$F_A/max = \frac{1}{\sqrt{(1-1+2\xi^2)^2+4\xi^2(1-2\xi^2)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (2.106)$$

Para amortecimentos muito pequenos, pode-se utilizar o seguinte:

$$F_A/max \cong \frac{1}{2\xi} \qquad (2.107)$$

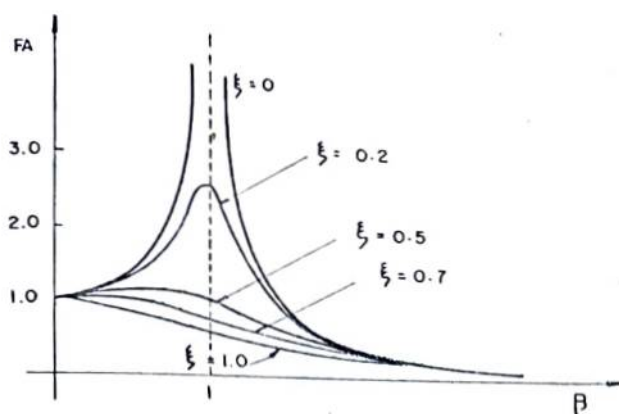



Fig. 2.45. Variação de F_A/max com ξ e β

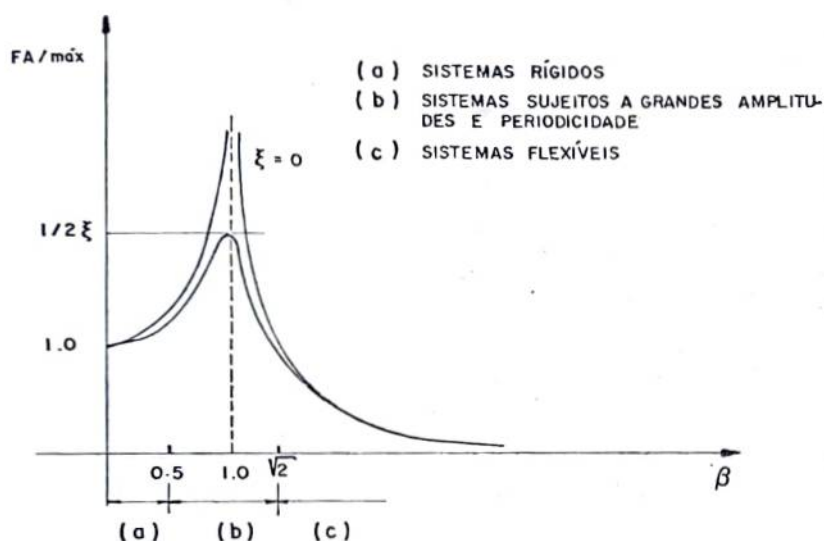



Fig. 2.46. Espectro de resposta para projeto

A nível de projeto, a fig. 2.46 pode ser considerada. É melhor trabalhar na faixa (c), devido à boa participação do amortecimento com a obtenção de uma resposta mais suave e com pequenas oscilações.

2.3.5. ISOLAMENTO DE VIBRAÇÃO

Estudam-se agora, dois tipos de problema: A forma como se transmite uma força F(t) através do sistema para a base; e a que regula os efeitos sobre o sistema de um deslocamento da base vb(t). Designa-se para fins didáticos a primeira situação por "transmissibilidade" e a segunda por "deslocamento de base", fig. 2.47.

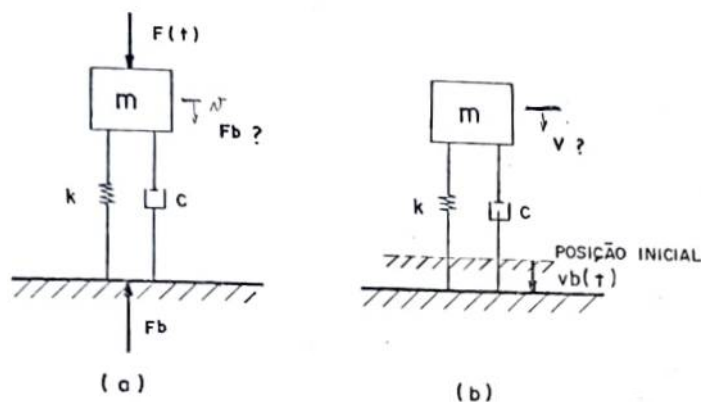



Fig. 2.47. (a) transmissibilidade; (b) deslocamento de base

Caso 1: Transmissibilidade (TR)

A força Fb, fig. 2.47a, pode ser obtida do seguinte modo:

$$Fb = F_E + F_A = kv + c\dot{v} \qquad (2.108)$$

Um fato importante a ser salientado é que está sendo considerado o caráter permanente da força F(t) e portanto, o deslocamento para carga senoidal, F_0 sen ωt, pode ser obtido pela expressão (2.100) e assim:

$$\dot{v} = -\frac{\omega v_{eo}}{D}\,\mathrm{sen}(\omega t-\alpha) \qquad v = \frac{v_{eo}}{D}\cos(\omega t-\alpha) \tag{2.109}$$

Substituindo-se as expressões (2.100) e (2.109) em (2.108), tem-se:

$$\frac{F_o}{k} = v_{eo}$$

$$F_b = \frac{F_o}{D}\cos(\omega t-\alpha) - \frac{c\omega}{k}\frac{F_o}{D}\,\mathrm{sen}(\omega t-\alpha)$$

$$\frac{c\omega}{k} = 2\xi\beta$$

$$\therefore \frac{F_b}{F_o} = c_1\cos(\omega t-\alpha-\gamma) \quad , \tag{2.110}$$

onde γ é o ângulo de defasagem entre a resposta da estrutura e o solo e

$$\mathrm{tg}\,\gamma = -2\xi\beta \quad ; \tag{2.111}$$

$$c_1 = \frac{1}{D}\sqrt{1+4\xi^2\beta^2} \quad ,$$

sendo D dado pela expressão (2.101).

A transmissibilidade (TR) é definida da seguinte maneira:

$$TR = F_b/F_o\Big|_{max} = c_1 = \frac{1}{D}\sqrt{1+4\xi^2\beta^2} \tag{2.112}$$

A fig. 2.47 mostra a variação de TR com os parâmetros β e ξ.

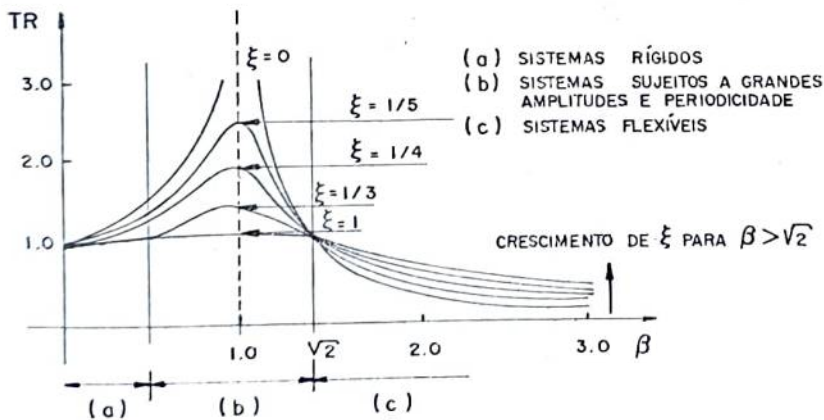



Fig. 2.48. Transmissibilidade

Utilizando-se do mesmo procedimento que na seção 2.3.4, a abcissa e a ordenada do ponto de máximo ("maximorum") são obtidas pelas expressões abaixo:

$$\beta = \sqrt{\frac{A-1}{4\xi^2}} \qquad (2.113)$$

e

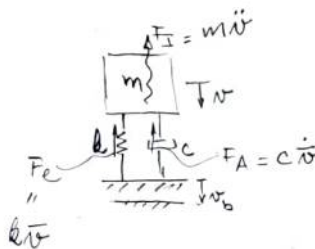
$$TR/max = 4\xi^2 \sqrt{\frac{A}{2A(8\xi^4-4\xi^2-1)+2(1+8\xi^2)}} \qquad (2.114)$$

onde: $A = \sqrt{1+8\xi^2}$

Nota-se que para valores acima de $\sqrt{2}$ o valor da transmissibilidade cresce com o crescimento de ξ. A melhor faixa de trabalho é a (c) pelo mesmo motivo já apresentado com referência a fig. 2.46.

Caso 2: Deslocamento de Base

Agora, considerando-se a fig. 2.47b, a equação a ser estudada é a seguinte:

$$F_I + F_A + F_E = 0$$

$$\therefore \; m\ddot{v} + c\dot{\bar{v}} + k\bar{v} = 0 \,, \qquad (2.115)$$

sendo $\bar{v} = v - v_b$, deslocamento do sistema em relação à base.

Nota-se que as forças de amortecimento e rigidez são referidas ao deslocamento relativo enquanto a de inércia é função da aceleração absoluta do sistema.

Desenvolvendo-se a equação (2.115), vem:

$$\ddot{v}+2\xi\omega_o\dot{v}+\omega_o^2 v = 2\xi\omega_o\dot{v}_b+\omega_o^2 v_{bo} f(t) \qquad (2.116)$$

ou

$$\ddot{\bar{v}}+2\xi\omega_o\dot{\bar{v}}+\omega_o^2\bar{v} = -\ddot{v}_{bo} f(t) \quad , \qquad (2.117)$$

onde $v_b = v_{bo} f(t)$.

Comparando-se as expressões (2.117) e (2.70), tem-se a seguinte analogia

$\ddot{v} + 2\xi\omega_o\dot{v} + \omega_o^2 v = \omega_o^2 v_{eo} f(t)$

$$-\frac{\omega_o^2\bar{v}}{\ddot{v}_{bo}} = \frac{v}{v_{eo}} \qquad (2.118)$$

$$\bar{v} = v - v_b \qquad (2.119)$$

No caso de $\xi=0$ a equação (2.116) torna-se:

$$\ddot{v} + \omega_o^2 v = \omega_o^2 v_{bo} f(t) \qquad (2.120)$$

A analogia, fazendo-se a mesma comparação anterior, é dada como:

$$\frac{v}{v_{bo}} = \frac{v}{v_{eo}} \qquad (2.121)$$

As expressões (2.118) e (2.121) são muito úteis para solucionar problemas com deslocamento de base, utilizando os resultados já conhecidos de espectros. Todavia, deve-se ter em mente que as condições iniciais, do problema em questão, têm que ser as mesmas utilizadas na obtenção de v, quando usada a expressão (2.118).

Para um deslocamento de base aplicado como um pulso retangular, utilizando-se a analogia (2.121), chega-se à solução

e o espectro de resposta da fig. 2.27 pode ser utilizado.

$$\frac{v}{v_{bo}} = (1-\cos\omega_0 t) \qquad (2.122)$$

Para um deslocamento de base permanente senoidal, ou seja:

$$v_b = v_{bo}\,\text{sen}\,\omega t \quad \therefore \quad \dot{v}_b = v_{bo}\,\omega\cos\omega t \quad \therefore \quad \ddot{v}_{bo} = -v_{bo}\,\omega^2\,\text{sen}\,\omega t$$

Utilizando-se a expressão (2.118), se preservadas as condições iniciais $\overline{v}_0 = 0$ e $\dot{\overline{v}}_0 = 0$, tem-se:

$$\frac{\omega_0^2\overline{v}}{\omega^2 v_{bo}} = M'\,\text{sen}\,\omega t + N'\cos\omega t \quad \therefore \quad \frac{v-v_b}{v_{bo}} = \beta^2[M'\,\text{sen}\,\omega t + N'\cos\omega t] \therefore$$

$$\frac{v}{v_{bo}} = \beta^2[(M' + \frac{1}{\beta^2})\,\text{sen}\,\omega t + N'\cos\omega t] \quad \therefore$$

$$\frac{v}{v_{bo}} = \beta^2[((M' + \frac{1}{\beta^2})^2 + N'^2)^{1/2}\cos(\omega t-\alpha')] \qquad (2.123)$$

$$\text{tg}\,\alpha' = \frac{M' + \frac{1}{\beta^2}}{N'}$$

Substituindo-se os valores de M' e N' da expressão (2.82), em (2.123), tem-se:

$$\frac{v}{v_{bo}} = \frac{\sqrt{1+4\xi^2\beta^2}}{D}\cos(\omega t-\alpha') = TR\cos(\omega t-\alpha')$$

e pode-se utilizar o mesmo espectro da fig. 2.48.

Exemplo 2.15. Seja o veículo da fig. 2.49, que tem uma velocidade constante, v_1, sobre um acidente do terreno de extensão pe-

quena, d e com forma senoidal $v_{bo}\,\text{sen}\,\omega t$.

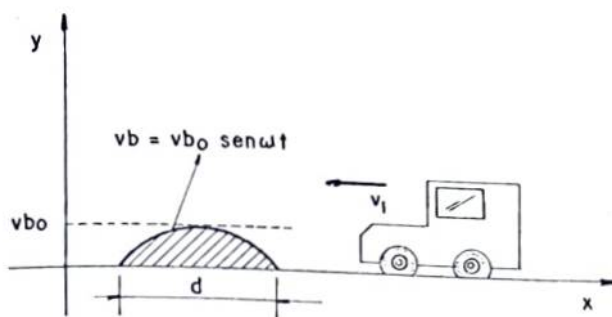



Fig. 2.49. Exemplo 2.15

Pelo fato da extensão ser pequena pode-se supor que $\xi=0$.

O deslocamento máximo e a velocidade em que o mesmo ocorre podem ser calculados com base no espectro da fig. 2.33 e na analogia feita em (2.121). Assim:

$$\frac{v_{max}}{v_{bo}} = 1.77 \quad \therefore \quad v_{max} = 1.77\, v_{bo}$$

$$t_1 f = 0.8 \quad \therefore \quad \frac{d}{v_1} f = 0.8 \quad \therefore \quad v_1 = 1.25 fd$$

O máximo deslocamento da suspensão da mola deveria ser calculado com uso da analogia (2.118), por ser um deslocamento relativo. Mas, neste caso, não pode ser utilizada devido às condições iniciais $\bar{v}_0$ e $\dot{\bar{v}}_0$ não serem homogêneas como em v_0 e $\dot{v}_0$. Então, é necessário voltar à solução geral e aplicar novas condições a ela. Tem-se:

$$\omega_0^2 \bar{v} = A \cos \omega_0 t + B \,\text{sen}\, \omega_0 t - \frac{\ddot{v}_{bo}}{1-\beta^2}\,\text{sen}\,\omega t \qquad (2.124)$$

$$\text{Em } t=0 \rightarrow \begin{cases} \bar{v}_0 = v_0 - v_b(0) \quad \therefore \quad \bar{v}_0 = v_0 = 0 \\ \dot{v}_b = v_{bo}\omega \cos \omega t \quad \therefore \quad \dot{\bar{v}}_0 = \dot{v}_0 - \omega v_{bo} = -\omega v_{bo} \neq 0 \end{cases}$$

Com $\overline{v}_0$ e $\dot{\overline{v}}_0$, tem-se A=0 e $B = \frac{-\beta}{1-\beta^2}\,\omega_0^2 v_{bo}$ e então:

$$\omega_0^2 \overline{v} = \frac{-\beta}{1-\beta^2}\,\omega_0^2 v_{bo} \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{\omega^2 v_{bo}}{1-\beta^2} \operatorname{sen} \omega t \quad \therefore$$

$$\frac{\overline{v}}{v_{bo}} = \overline{F_A} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\left[\operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{\beta} \operatorname{sen} \omega_0 t\right] \qquad (2.125)$$

A expressão (2.125) fornece o deslocamento relativo ocorrendo durante o pulso. O espectro de resposta é visto na fig. 2.50, notando-se que a ordenada máxima do espectro ocorre após o pulso. Os "máximos após" são os mesmos do espectro da fig. 2.33, embora não ocorram com os mesmos valores de ft_1. O cálculo para a obtenção do valor máximo do espectro é obtido da mesma forma da seção 2.3.3.1, item b.1. Visto isto, o cálculo do deslocamento pretendido é fornecido em seguida.

$$\left.\frac{\overline{v}}{v_{bo}}\right|_{max} = 1.716 \qquad \overline{v}_{max} = 1.716\, v_{bo}$$

A velocidade em que ocorre este máximo é calculada da mesma forma anterior, isto é:

$ft_1 = 0.685$ (valor da abcissa do máximo) $\therefore\; f\frac{d}{v_1} = 0.685$

$\therefore\; v_1 = 1.46\, fd$

A aceleração máxima que o veículo sofre, $\ddot{v}$, ocorre após o pulso e assim:

$$\ddot{v} + \omega_0^2 \overline{v} = 0 \quad \therefore \quad \ddot{v} = -\omega_0^2 \overline{v}$$

$$\therefore\; \ddot{v}/max = \omega_0^2\, \overline{v}/max \quad \therefore \quad \ddot{v}/max = 1.716\, \omega_0^2 v_{bo}$$

nr	$t_0\,t_1$	FA / max.
1	0,030	0,999
2	0,500	1,574
3	0,550	1,612
4	0,655	1,716
5	1,500	0,538
6	3,000	0,343
7	4,000	0,254

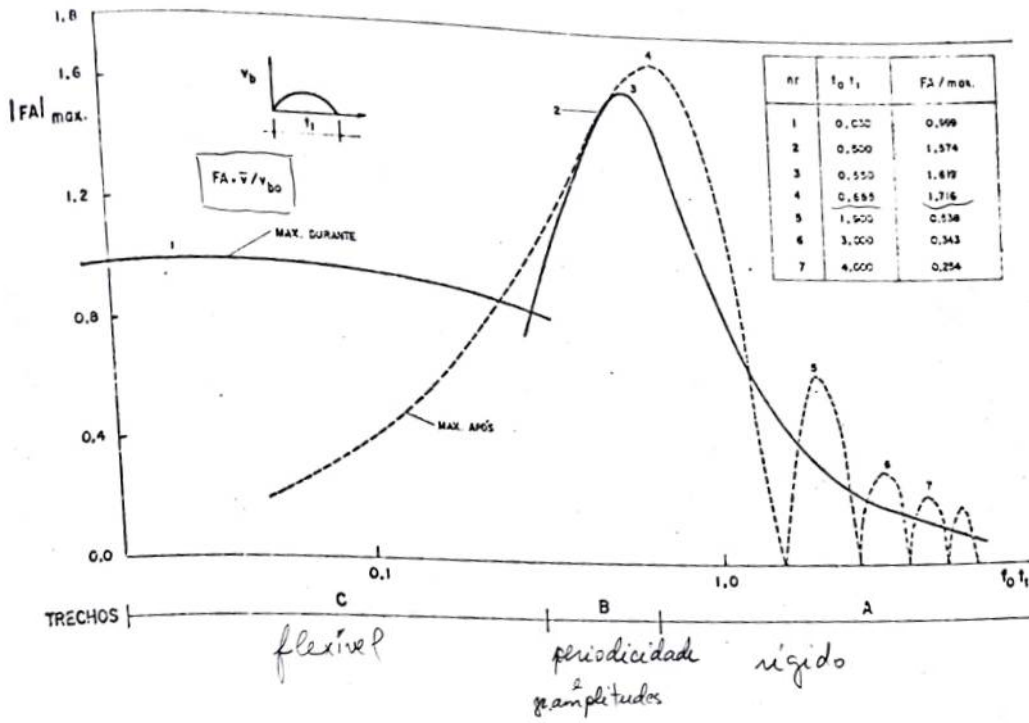



Fig. 2.50. Espectro de resposta para deformação da mola-deslocamento de base $v_b = v_{bo}$ senωt

Anotações :

Nota-se que a aceleração máxima tende a zero para sistemas flexíveis ($\omega_0 \to 0$) e a velocidade correspondente é a mesma calculada anteriormente, com o máximo deslocamento da suspensão. A aceleração do veículo ($\ddot{v} = \omega_0^2 \bar{v}$) é igual à pseudo-aceleração do sistema.

Exemplo 2.16. Considera-se, agora, que o veículo do exemplo anterior tem pelo caminho uma ondulação com várias meias ondas de extensão d, ao invés de uma só e estima-se que o seu sistema de amortecedores possui $\xi = 0.05$.

O deslocamento da suspensão e a que velocidade ocorre são calculados utilizando-se as expressões (2.113) e (2.114).

$$\frac{v}{v_{bo}}\Bigg|_{max} = TR\Big|_{max} \quad \therefore \quad v_{max} = 10.06\ v_{bo}$$

$$\beta \cong 0.998 \quad \therefore \quad f t_1 = \frac{1}{2\beta} \quad \therefore \quad f\,\frac{d}{v_1} = \frac{1}{2\beta} \quad \therefore \quad v_1 = 1.996\ fd$$

O deslocamento máximo da suspensão e a velocidade em que ocorrem são calculados utilizando-se a analogia (2.118), que pode ser usada pelo fato da ação ser permanente, não importando as condições iniciais. Assim:

$$\frac{\omega_0^2 \bar{v}}{\omega^2 v_{bo}} = \frac{1}{D}\cos(\omega t - \alpha) \quad \therefore \quad \frac{\bar{v}}{v_{bo}} = \frac{\beta^2}{D}\cos(\omega t - \alpha)$$

$$\therefore \quad \bar{F}_A = \frac{\beta^2}{D} \quad ,$$

onde D é dado pela expressão (2.101).

O "máximo maximorum" ou a ordenada máxima do espectro

pode ser calculado da forma seguinte:

$$\frac{d\overline{F_A}}{d\beta} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d(\overline{F_A})^2}{d\beta} = 0$$

$$\frac{4\beta^3[1-\beta^2]^2 + 4\xi^2\beta^5 - \beta^4[8\xi^2\beta - 4\xi(1-\beta^2)]}{D^4} = 0$$

$$\therefore \quad 4\beta^3(1-\beta^2+2\beta^2\xi^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \beta = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}} \end{cases}$$

Para $\beta=0$:

Para $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}$

$\rightarrow \max\left(\frac{1}{D}\right) = \max\left(\frac{\beta^2}{D}\right)$ (carga senoidal).

$$F_A/\max = \left.\frac{\beta^2}{D}\right|_{\beta=\frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}} \quad \therefore \quad \left.\frac{\overline{v}}{v_{bo}}\right|_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = F_A|_{max} \qquad (2.126)$$

Para valores muito baixos de ξ a fórmula seguinte pode ser usada.

$$\left.\frac{\overline{v}}{v_{bo}}\right|_{max} = \frac{1}{2\xi} \qquad (2.127)$$

Para $\xi=0.05$ segue-se, então:

$$\left.\frac{\overline{v}}{v_{bo}}\right|_{max} = \frac{1}{2\cdot 0.05\sqrt{1-0.05^2}} = 10.0125 \quad \therefore \quad \overline{v}/max = 10.0125 v_{bo}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-2\cdot 0.05^2}} \simeq 1.0025 \quad \therefore \quad v_1 = 2\beta f d \quad \therefore \quad v_1 = 2.0050 f d$$

A aceleração máxima do veículo é calculada como se segue:

$$\ddot{v} = -\omega^2 v_{bo}\ TR/max \quad \therefore \quad \ddot{v}/max = 10.06\ \omega^2 v_{bo}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_o} = 0.998 \quad \therefore \quad \omega = 0.998\ \omega_o$$

$$\therefore\ \ddot{v}/max \cong 10.01\ \omega_o^2\ v_{bo}$$

No projeto de isolamento de vibrações de sistemas é usual exprimir-se o comportamento dos mesmos, em termos de sua "eficiência de isolamento", designada por (1-TR). Como a faixa desejada para o isolamento da vibração é para $\beta > \sqrt{2}$, e ainda na mesma faixa sendo o amortecimento indesejável, é possível usar para a transmissibilidade a expressão (2.112), com $\xi = 0$, ou seja:

$$TR = \frac{1}{\beta^2 - 1} \quad \therefore \quad (1-TR) = \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - 1} \tag{2.128}$$

$$\beta^2 = \frac{2-(1-TR)}{1-(1-TR)} \quad , \quad \text{mas}$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{\omega_o^2} \quad , \quad \text{sendo} \quad \omega_o^2 = \frac{g}{\delta_e} \quad ,$$

onde δ_e é o deslocamento estático e g a aceleração da gravidade e então:

$$\omega^2 = \frac{g}{\delta_e}\left[\frac{2-(1-TR)}{1-(1-TR)}\right] \quad \therefore \quad f = \omega/2\pi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_e}\left[\frac{2-(1-TR)}{1-(1-TR)}\right]}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.81}{0.0254}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\delta_e}\left[\frac{2-(1-TR)}{1-(1-TR)}\right]} \quad \therefore \quad f = 3.1278\sqrt{\frac{1}{\delta_e}\left[\frac{2-(1-TR)}{1-(1-TR)}\right]} \tag{2.129}$$

Com a expressão (2.129) pode-se montar a carta de projeto de iso

lamento de vibração, fig. 2.51.

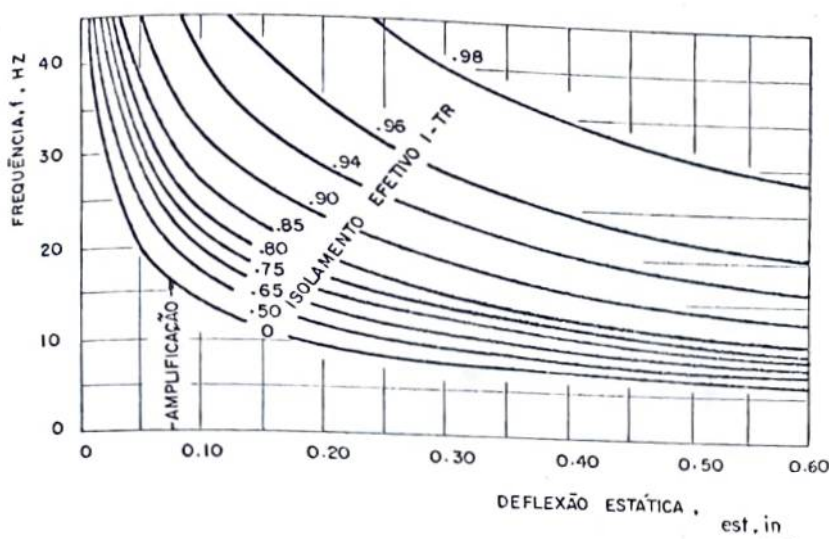



Fig. 2.51. Carta de projeto de isolamento de vibração

2.3.6. DETERMINAÇÃO DE ω_0 E ξ COM BASE NO TESTE DE VIBRAÇÃO FORÇADA

Para se submeter um sistema a uma carga senoidal, já estudada, a maneira mais conveniente é através da utilização de duas massas excêntricas, girando a uma velocidade angular ω como mostra a fig. 2.52. As componentes horizontais H_0 equilibram-se, restando as verticais $V_0=F_0$ sen ωt, sendo $F_0=m\ \omega^2 r$.

Aplicada a excitação, registram-se as respostas para se obter os valores de β, através de um espectro, como o da fig. 2.53. O valor de $\beta=\omega/\omega_0\cong 1$ corresponde à ordenada máxima e o valor de ω_0 é assim expresso pela frequência ω do carregamento.

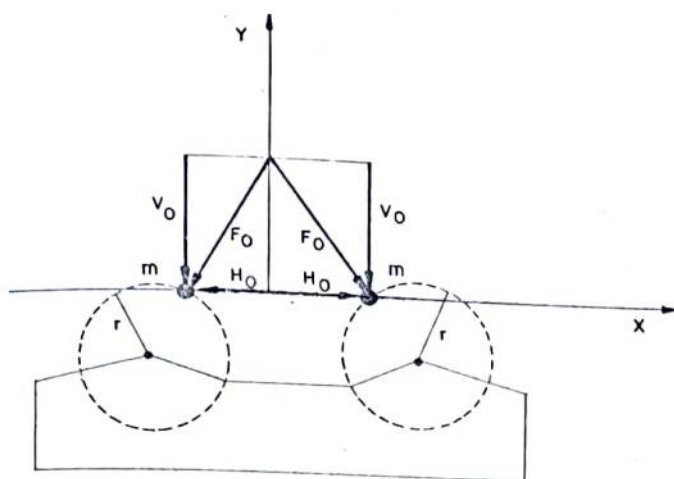



Fig. 2.52. Teste de vibração forçada para obtenção de ω_0 e ξ

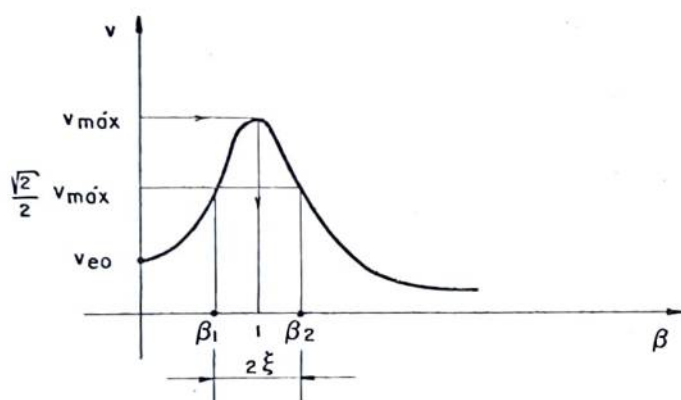



Fig. 2.53. Espectro obtido pelo teste de vibração forçada

O amortecimento deveria ser obtido a partir de $\frac{v_{max}}{v_{eo}} = \frac{1}{2\xi}$, mas o valor de v_{eo} não pode ser obtido facilmente (β=0?). Entretanto, para a ordenada $v = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{max}$, a largura da faixa, $\beta_2 - \beta_1$, é aproximadamente igual a 2ξ. Este fato é mostrado a seguir.

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{max} \cong \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v_{eo}}{2\xi} \quad , \quad \text{mas} \quad v = \frac{1}{D} v_{eo} \quad \text{então:}$$

$$\frac{\sqrt{2}\, v_{eo}}{4\xi} \cong \frac{v_{eo}}{D} \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{2}}{4\xi} \cong \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2}}$$

$$\therefore \beta^4 - 2(1-2\xi^2)\beta^2 + (1-8\xi^2) = 0$$

$$\therefore \beta^2 \cong (1-2\xi^2) \pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2}$$ e para ξ pequeno tem-se:

$$\beta^2 \cong (1-2\xi^2) \pm 2\xi$$

$$\therefore \left[\begin{array}{l} \beta_1^2 \cong 1-2\xi-2\xi^2 \cong 1-2\xi \\ \beta_2^2 \cong 1+2\xi-2\xi^2 \cong 1+2\xi \end{array}\right.$$

Quando ξ é pequeno pode-se incluir a parcela ξ^2 que o resultado é praticamente o mesmo. Então:

$$\left[\begin{array}{l} \beta^2 \cong 1-2\xi+\xi^2 \cong (1-\xi)^2 \\ \beta_2 \cong 1+2\xi+\xi^2 \cong (1+\xi)^2 \end{array}\right. \quad \therefore \quad \left[\begin{array}{l} \beta_1 \cong 1-\xi \\ \beta_2 \cong 1+\xi \end{array}\right.$$

Conclui-se então que $\beta_2-\beta_1 \cong 2\xi$.

2.4. OUTROS MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA S1GL

Existem outros métodos para análise da resposta de S1GL. Entre eles estão: integral de Duhamel; técnicas numéricas; plano do ângulo de fase (método gráfico); técnicas analógicas; transformada de Laplace.

São mostrados nas seções que se seguem os métodos da integral de Duhamel e uma técnica numérica apresentada por Newmark.

2.4.1. INTEGRAL DE DUHAMEL

Este método está associado à idéia de impulso, o qual é apresentado utilizando-se a solução mostrada na expressão (2.54).

Para a fig. 2.54a, sendo t_1 muito pequeno, tem-se:

$$I = \int_0^{t_1} m\ddot{v}\, dt = \int_0^{t_1} F\, dt = F\Delta t = Ft_1 = m\Delta\dot{v}$$

$$\therefore \Delta\dot{v} = I/m$$

Considerando-se agora um sistema que está inicialmente em repouso ($v_0=\dot{v}_0=0$) e que no tempo $t=\tau$ está submetido a um impulso I, como mostra a fig. 2.54b, com condições $v_\tau=0$ e $\dot{v}_\tau=\Delta\dot{v}=I/m$, então a expressão (2.54) torna-se:

$$v = [\overset{0}{v_\tau}\cos\omega_a t^* + (\frac{\dot{v}_\tau}{\omega_a} + \frac{\xi \overset{0}{v_\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}})\ \text{sen}\ \omega_a t^*]e^{-\xi\omega_0 t^*} \quad ,$$

sendo $t^* = t-\tau$

$$\therefore \quad v = e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \frac{I}{m\omega_a} \text{sen}[\omega_a(t-\tau)]$$

de outra forma:

$$v = I\ h(t-\tau) \quad , \tag{2.130}$$

onde

$$h(t-\tau) = \frac{\text{sen}[\omega_a(t-\tau)]}{m\omega_a} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \tag{2.131}$$

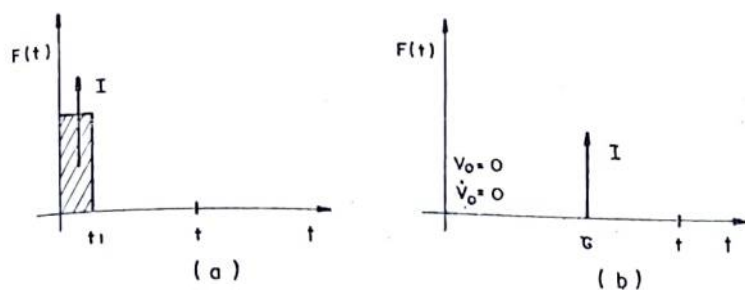



Fig. 2.54. Impulso I

A função $h(t-\tau)$ é denominada "função resposta a impulso unitário". Para $\xi=0$, segue-se:

$$h(t-\tau) = \frac{\text{sen}\ \omega_o(t-\tau)}{m\omega_o} \quad (\xi = 0) \tag{2.132}$$

Considera-se, agora, uma solicitação contínua, como ilustrada na fig. 2.55.

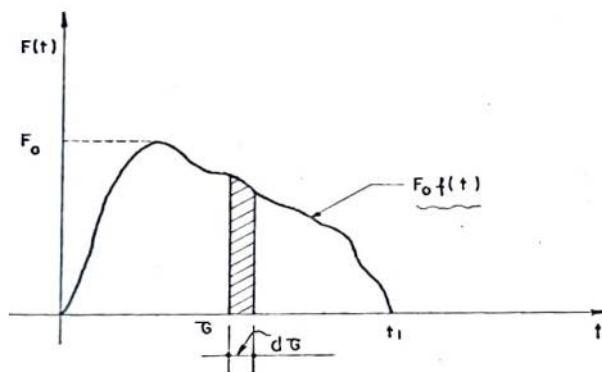



Fig. 2.55. Solicitação contínua

Para o intervalo infinitesimal, $d\tau$, tem-se:

$$dI = F(\tau)d\tau = F_o\ f(\tau)\,d\tau,$$

sendo τ a variável que define a excitação.

A resposta elementar é obtida pela expressão:

$$dv = dI\ h(t-\tau)$$

$$\therefore \quad v = \int_0^{t'} dv = \int_0^{\tau=t'} F(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$\therefore \quad v = k\int_0^{\tau=t'} v_e(\tau) h(t-\tau) d\tau = k\int_0^{\tau=t'} v_{eo} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$\therefore \quad F_A = \frac{v}{v_{eo}} = k\int_0^{\tau=t'} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \qquad (2.133)$$

Ainda observando a fig. 2.55, se $t<t_1$ então $t'=t$ e se $t\geq t_1$, $t'=t_1$.

Se houver, como excitação, um deslocamento de base é válida a analogia (2.118) e assim:

$$-\frac{\omega_0^2 \bar{v}}{\ddot{v}_{bo}} = k\int_0^{t'} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad ,$$

sendo $f(\tau)=\ddot{v}_b(\tau)$, então:

$$\bar{v} = -m\int_0^{t'} \ddot{v}_b(\tau) h(t-\tau) d\tau \qquad (2.134)$$

É importante salientar, novamente, que as condições iniciais do problema, em v e $\dot{v}$, devem ser homogêneas, caso contrário é necessário acrescentar o termo da vibração livre correspondente $\bar{v}_{bo}$ e $\dot{\bar{v}}_{bo}$.

Exemplo 2.17. Para o mesmo pulso da fig. 2.25, pode-se escrever:

$$v = k\int_0^{t} v_{eo} h(t-\tau) d\tau \qquad (\xi=0)$$

$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$

$$\therefore F_A = k\int_0^t \frac{\text{sen } \omega_o(t-\tau)}{m\omega_o} d\tau = \frac{k}{m\omega_o} \frac{\cos[\omega_o(t-\tau)]}{\omega_o}\Big|_0^t =$$

$$= \cos[\omega_o(t-\tau)]\Big|_0^t \rightarrow \begin{cases} \text{se } t \leqq t_1 \rightarrow F_A = 1 - \cos \omega_o t \\ \text{se } t \geqq t_1 \rightarrow F_A = \cos[\omega_o(t-t_1)] - \cos \omega_o t \end{cases}$$

Desenvolvendo-se a expressão para $t \geqq t_1$ obtém-se:

$$F_A = 2\text{sen } \frac{\omega_o t_1}{2} \text{ sen } \omega_o(t - \frac{t_1}{2})$$

Exemplo 2.18. Para a solicitação da fig. 2.56, os seguintes resultados podem ser verificados:

i) se $t < t_1$: o resultado é o mesmo do exemplo anterior.

ii) se $t_1 \leqq t \leqq t_2$: o resultado é o mesmo do exemplo anterior para $t \geqq t_1$.

iii) se $t_2 \leqq t \leqq t_3$:

$$v_2 = \int_0^{t_1} F_o h(t-\tau) d\tau + I h(t-t_2)$$

iv) se $t_3 \leqq t \leqq t_4$:

$$v_3 = v_2 - \int_{t_3}^{t} F_o \text{ sen } \omega(\tau - t_3)\, h(t-\tau) d\tau$$

v) se $t \geqq t_4$:

$$v_4 = v_2 - \int_{t_3}^{t_4} F_o \text{ sen } \omega(\tau - t_3)\, h(t-\tau) d\tau$$

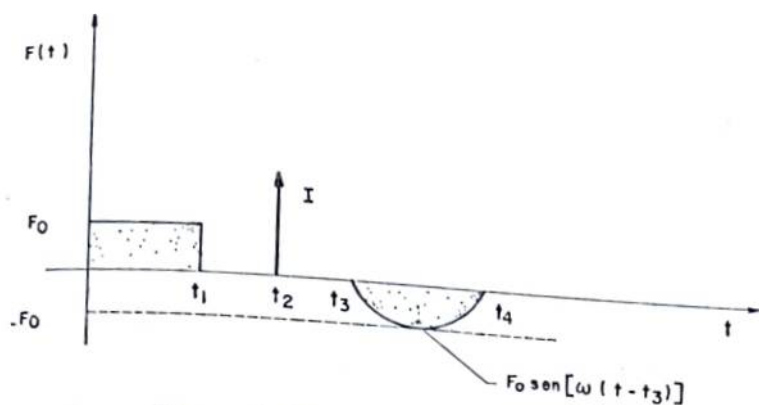



Fig. 2.56 - Exemplo 2.18

2.4.2. MÉTODO NUMÉRICO DE NEWMARK

Há diversos métodos numéricos de integração disponíveis para a solução da equação de movimento. Os mais usados na prática são aqueles que consideram a variação linear da aceleração da massa ao longo do intervalo de integração, a qual pode ser vista na fig. 2.57, acompanhada das respectivas curvas da velocidade (quadrática) e do deslocamento (cúbica).

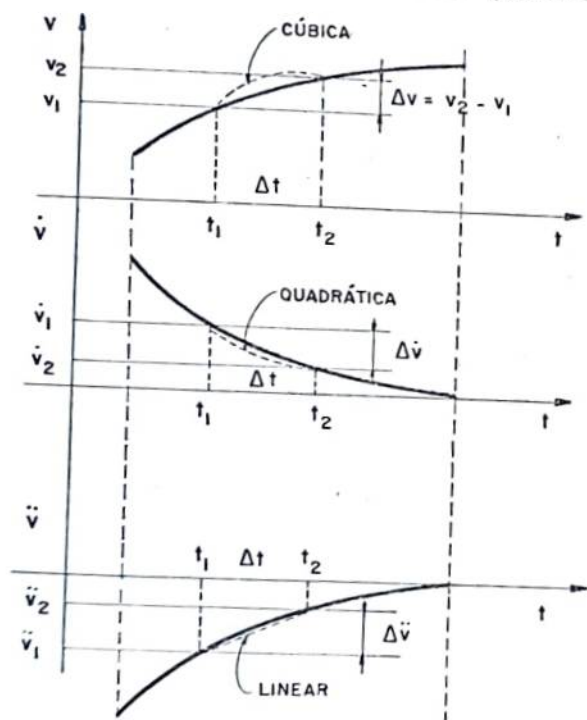



Fig. 2.57 - Movimento do sistema durante um intervalo de tempo (com base na aceleração linear)

A expressão para a velocidade no fim de cada intervalo é dada abaixo:

$$\dot{v}_2 = \dot{v}_1 + \frac{\ddot{v}_1+\ddot{v}_2}{2}\Delta t \qquad (2.135)$$

Para a obtenção de v_2 em função de v , usa-se a série de Taylor, como se segue:

$$v_2 = v_1 + \dot{v}_1\Delta t + \ddot{v}_1 \frac{\Delta t^2}{2} + \dddot{v}_1 \frac{\Delta t^3}{6} + v_1^{iv} \frac{\Delta t^4}{24} + \ldots$$

Admitindo-se que $\ddot{v}$ varia linearmente então $\dddot{v}=(\ddot{v}_2-\ddot{v}_1)/\Delta t$ e $v^{iv}=0$ e daí:

$$v_2 = v_1 + \dot{v}_1\Delta t + \ddot{v}_1 \frac{\Delta t^2}{3} + \ddot{v}_2 \frac{\Delta t^2}{6} \qquad (2.136)$$

As expressões (2.135) e (2.136) são as fórmulas de Newmark.

No trabalho original, apresentado na "ASCE - STRUCTURAL DIVISION - JULHO DE 1959", as expressões apresentadas são as seguintes:

$$\dot{v}_2 = \dot{v}_1+(1-\gamma)\ddot{v}_1\Delta t+\gamma\ddot{v}_2\Delta t \quad , \qquad (2.137)$$

$$v_2 = v_1+\dot{v}_1\Delta t+(\tfrac{1}{2}-\beta)\ddot{v}_1\Delta t^2 + \beta\ddot{v}_2\Delta t^2 \quad , \qquad (2.138)$$

sendo $\beta= \frac{1}{6}$ e $\gamma=\frac{1}{2}$ para reproduzir (2.135) e (2.136).

Na forma incremental, a equação de movimento é escrita como:

$$m\Delta\ddot{v} + c\Delta\dot{v} + k\Delta v = \Delta F \qquad (2.139)$$

De (2.135) e (2.136), têm-se:

$$\Delta\dot{v} = \dot{v}_2 - \dot{v}_1 = \ddot{v}_1\Delta t + \Delta\ddot{v}\,\frac{\Delta t}{2} \qquad (2.140)$$

e

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \dot{v}_1\Delta t + \ddot{v}_1\,\frac{\Delta t^2}{2} + \Delta\ddot{v}\,\frac{\Delta t^2}{6} \qquad (2.141)$$

Antes de se resolver a equação de movimento na forma incremental é conveniente explicitá-la em Δv, assim de (2.141), vem:

$$\Delta\ddot{v} = \frac{6}{\Delta t^2}\,\Delta v - \frac{6}{\Delta t}\,\dot{v}_1 - 3\ddot{v}_1 \qquad (2.142)$$

Agora, de (2.140) e (2.142):

$$\Delta\dot{v} = \frac{3}{\Delta t}\,\Delta v - 3\dot{v}_1 - \frac{\Delta t}{2}\,\ddot{v}_1 \qquad (2.143)$$

Substituindo-se as expressões (2.142) e (2.143) em (2.139), vem:

$$m[\frac{5}{\Delta t^2}\,\Delta v - \frac{6}{\Delta t}\,\dot{v}_1 - 3\ddot{v}_1] + c[\frac{3}{\Delta t}\,\Delta v - 3\dot{v}_1 - \frac{\Delta t}{2}\,\ddot{v}_1] + k\,\Delta v = \Delta F \qquad (2.144)$$

Finalmente, carregando-se os termos associados com condições já conhecidas para o lado direito da equação (2.144), tem-se:

$$\bar{k}\,\Delta v = \Delta\bar{F} \quad , \qquad (2.145)$$

onde:

$$\bar{k} = \frac{6}{\Delta t^2} m + \frac{3}{\Delta t} c + k \qquad (2.146)$$

e

$$\Delta\bar{F} = \Delta F + m\left(\frac{6}{\Delta t} \dot{v}_1 + 3\ddot{v}_1\right) + c\left(3\dot{v}_1 + \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}_1\right) \qquad (2.147)$$

De posse do valor de Δv em (2.145), com a ajuda das expressões (2.142) e (2.143) obtêm-se: $v_2 = v_1 + \Delta v$; $\dot{v}_2 = \dot{v}_1 + \Delta\dot{v}$ e $\ddot{v}_2 = \ddot{v}_1 + \Delta\ddot{v}$. Este procedimento deve ser feito até o último intervalo de tempo considerado para a integração.

É importante ressaltar que dentro de cada intervalo Δt, a aceleração é linear e além disso o amortecimento e a rigidez do sistema permanecem constantes. Os erros cometidos são proporcionais ao tamanho do intervalo escolhido. Quanto menor o for mais precisão é obtida. Como ele tende a se acumular em cada parte do processo, é conveniente no final da integração forçar a satisfação da equação de movimento sob a forma integral:

$$\ddot{v}_2 = \frac{1}{m} [F_2 - F_{a_2} - F_{k_2}] \quad , \qquad (2.148)$$

onde F_{a_2} e F_{k_2} são as forças de amortecimento e rigidez, respectivamente.

O algoritmo abaixo resume todo o procedimento a ser seguido.

1. conhecidos v_1 e $\dot{v}_1$ em Δt, determina-se F_{a_1} e F_{k_1}, através das relações de força x velocidade e força x deslocamento, respectivamente;
2. $\ddot{v}_1$ é calculada em (2.148); → a partir da eq. de mov.
3. $\bar{k}$ e $\Delta\bar{F}$ são obtidos, respectivamente, em (2.146) e (2.147);

4. acha-se Δv em (2.145);

5. calcula-se $\Delta\ddot{v}$ e $\Delta\dot{v}$, respectivamente, em (2.142) e (2.143);

6. $v_2 = v_1 + \Delta v$ e $\dot{v}_2 = \dot{v}_1 + \Delta\dot{v}$;

7. faz-se $v_1 = v_2$ e $\dot{v}_1 = \dot{v}_2$ e retorna-se ao passo 1 até o último intervalo Δt.

O intervalo de tempo deve ser suficientemente pequeno para ser capaz de representar, convenientemente, a excitação, F(t), a rigidez, k(t), o amortecimento c(t), e o período fundamental, T_0.

Normalmente, o intervalo Δt é estabelecido a partir de T_0, pois a representação da excitação não é problema e o intervalo necessário é facilmente deduzível e, quanto a k(t) e c(t), o intervalo necessário para T_0 é, em geral, suficiente para esses elementos e pode-se fazer uma subdivisão de Δt em angulosidades da função. Em geral, $\Delta t=(T_0/10)$ já produz resultados com uma razoável precisão e, dependendo do caso, pode-se utilizar até $\Delta t=(T_0/50)$.

O método da variação linear da aceleração só é estável sob a condição de $\Delta t \leq T_0/(\pi\sqrt{1-4\beta})$, para $\beta = \frac{1}{6}$, ou seja, $\Delta t \leq 0.5513 T_0$ - normalmente, o tamanho do intervalo necessário à precisão é menor do que este.

3. SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE (2GL), SEM AMORTECIMENTO

3.1. EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Um sistema com dois graus de liberdade é aquele que necessita de duas coordenadas para descrever seu movimento.

Seja o sistema da fig. 3.1a, definido pelas coordenadas v_1 e v_2, com duas massas constantes m_1 e m_2 e constantes elásticas das molas k_1 e k_2. O sistema está submetido a duas forças externas que variam com o tempo, $F_1(t)$ e $F_2(t)$.

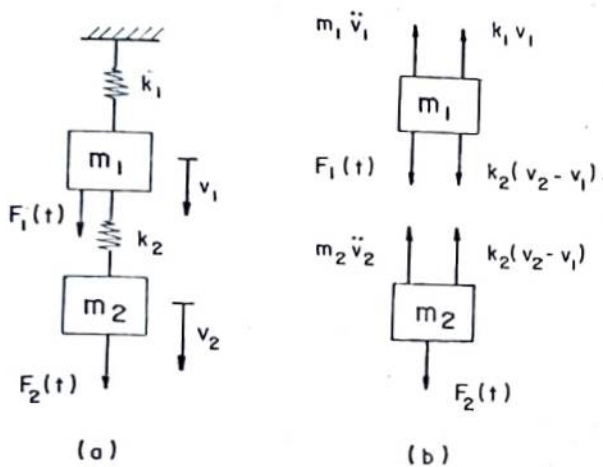



Fig. 3.1. (a) S2GL; (b) equilíbrio dinâmico

Utilizando-se o princípio de D'Alembert encontra-se a equação diferencial de movimento para cada uma das massas. Pois, para cada grau de liberdade há uma equação diferencial para definir o movimento. Assim, considerando-se a fig. 3.1b, tem-se:

$$m_1\ddot{v}_1 + k_1 v_1 - k_2(v_2 - v_1) - F_1(t) = 0$$

$$m_2\ddot{v}_2 + k_2(v_2 - v_1) - F_2(t) = 0$$

Rearrumando-se os termos nas equações acima, tem-se:

$$m_1\ddot{v}_1 + (k_1+k_2)v_1 - k_2 v_2 = F_1(t)$$
$$m_2\ddot{v}_2 - k_2 v_1 + k_2 v_2 = F_2(t) \qquad (3.1)$$

Estas são as equações de movimento que definem o sistema de 2GL.

Para determinar a resposta deste sistema deve-se utilizar as equações (3.1) de forma simultânea, pois v_1 e v_2 aparecem nas duas equações e são por isso chamadas acopladas. Em caso contrário, ou seja, quando estas equações podem ser resolvidas separadamente, elas são ditas desacopladas.

Como exemplo de equações desacopladas, é visto o sistema da fig. 3.2a que é definido pelo movimento vertical v e rotação θ, fig. 3.2b. O corpo rígido de massa m está apoiado sobre duas molas de constante elástica, k, e atuam externamente à força F(t) e ao momento M(t). As coordenadas em tal caso são independentes.

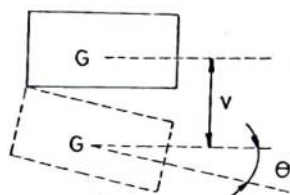
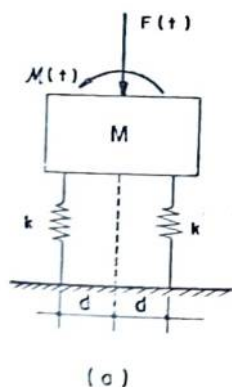



Fig. 3.2. S2GL desacoplado

As equações de movimento são:

$$m\ddot{v} + 2kv = F(t)$$

$$I_0\ddot{\theta} + 2kd^2\theta = M(t) \qquad (3.2)$$

onde I_0 é o momento de inércia da massa em relação ao eixo de rotação.

Exemplo 3.1. A viga representada na fig. 3.3a, constituída por duas barras conectadas por uma rótula em B, está excitada por duas forças $F_1(t)$ e $F_2(t)$ atuando nos pontos B e C, respectivamente. O sistema é definido pelos deslocamentos verticais destes pontos e possui uma força normal N atravessando toda a viga. As barras possuem massa uniformemente distribuída $\overline{m}_1$ e $\overline{m}_2$.

Os cálculos das forças que estão atuando no sistema, fig. 3.3b, estão relacionados a seguir.

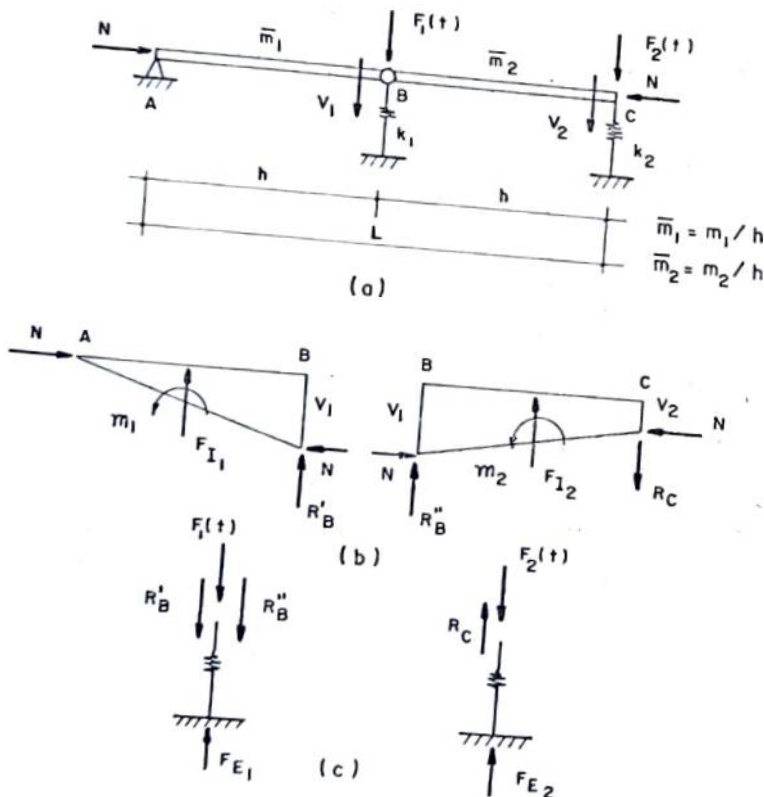



Fig. 3.3. Exemplo 3.1

$$F_{I_1} = \frac{m_1\ddot{v}_1}{2} \qquad F_{E_1} = k_1 v_1$$

$$F_{I_2} = \frac{m_2(\ddot{v}_1+\ddot{v}_2)}{2} \qquad F_{E_2} = k_2 v_2$$

$$m_1 = I_0 \frac{\ddot{v}_1}{h} = \frac{m_1 h^2}{12} \cdot \frac{\ddot{v}_1}{h} = \frac{m_1 h}{12}\ddot{v}_1 \qquad (3.3)$$

$$m_2 = I_0 \frac{(\ddot{v}_2-\ddot{v}_1)}{h} = \frac{m_2 h}{12}(\ddot{v}_2-\ddot{v}_1)$$

I_0 é o momento de inércia de massa de uma barra. As reações nos apoios são calculadas tomando-se os momentos em relação aos pontos ~~B~~. A, C e B.

$$R_B' = \frac{N}{h} v_1 - \frac{m_1}{3}\ddot{v}_1$$

$$R_B'' = \frac{N}{h}(v_1-v_2) - \frac{m_2}{3}\ddot{v}_1 - \frac{m_2}{6}\ddot{v}_2 \qquad (3.4)$$

$$R_C = \frac{N}{h}(v_1-v_2) + \frac{m_2}{6}\ddot{v}_1 + \frac{m_2}{3}\ddot{v}_2$$

Fazendo-se o equilíbrio das forças segundo a fig. 3.3c, encontra-se a equação diferencial de movimento para o sistema.

$$-F_{E_1} + R_B' + R_B'' + F_1(t) = 0$$

$$\frac{1}{3}(m_1+m_2)\ddot{v}_1 + \frac{1}{6}m_2\ddot{v}_2 + (k - \frac{2N}{h})v_1 + \frac{N}{h}v_2 = F_1(t)$$

$$-R_C - F_{E_2} + F_2(t) = 0 \qquad (3.5)$$

$$\frac{1}{6}m_2\ddot{v}_1 + \frac{1}{3}m_2\ddot{v}_2 + \frac{N}{h}v_1 + (k_2 - \frac{N}{h})v_2 = F_2(t)$$

Nota-se do exemplo que o sistema é acoplado.

Exemplo 3.2. A fig. 3.4a representa dois pêndulos acoplados por meio de uma mola, k, que não está sob tensão quando as duas has-

tes estão na posição vertical. Os deslocamentos angulares anti-horários são considerados positivos.

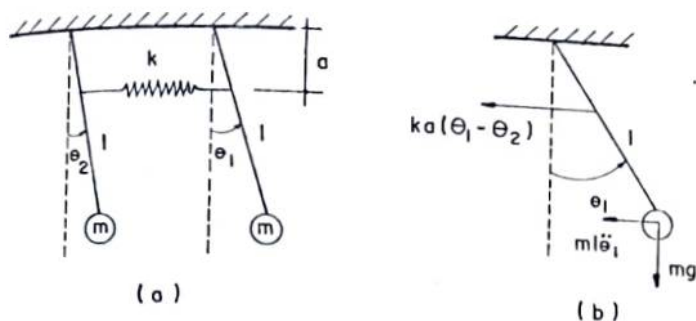



Fig. 3.4. Exemplo 3.2

Tomando-se os momentos das forças em relação aos pontos de suspensão, parte(b), obtém-se a equação de movimento para pequenas oscilações:

$$m\ell^2\ddot{\theta}_1 + (mg\ell+ka^2)\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0$$
$$m\ell^2\ddot{\theta}_2 - ka^2\theta_1 + (mg\ell+ka^2)\theta_2 = 0 \qquad \text{acoplados.} \qquad (3.6)$$

3.2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

3.2.1. VIBRAÇÃO LIVRE

3.2.1.1. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

Um sistema com 2GL é caracterizado por duas frequências naturais. A cada uma delas está associada uma configuração do sistema segundo a qual este pode oscilar, mantendo-se constante a relação entre os deslocamentos, (v_1/v_2) das massas. Tais configurações chamam-se modos de vibração.

Considerando-se agora o sistema da fig. 3.1a em vibração livre, pode-se escrever a partir das equações (3.1), fazendo-se $F_1(t)=F_2(t)=0$, o seguinte:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{v}_1 + (k_1+k_2)v_1 - k_2v_2 &= 0 \\ m_2\ddot{v}_2 - k_2v_1 + k_2v_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Por analogia com o S1GL o movimento é harmônico e de mesma frequência. Os deslocamentos são expressos por:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_1\cos(\omega_0 t-\alpha) & \ddot{v}_1 &= -V_1\omega_0^2\cos(\omega_0 t-\alpha) \\ v_2 &= V_2\cos(\omega_0 t-\alpha) & \ddot{v}_2 &= -V_2\omega_0^2\cos(\omega_0 t-\alpha) \end{aligned} \qquad (3.8)$$

onde V_1 e V_2 são as amplitudes características e α o ângulo de fase.

Substituindo-se as expressões (3.8) nas equações (3.7), obtém-se:

$$\begin{aligned} (-m_1\omega_0^2+k_1+k_2)V_1-k_2V_2 &= 0 \\ -k_2V_1+(-m_2\omega_0^2+k_2)V_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Para que haja solução em (3.9), para quaisquer valores de V_1 e V_2, o determinante Δ tem que ser nulo. Assim:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-m_1\omega_0^2+k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-m_2\omega_0^2+k_2) \end{vmatrix} = 0$$

Para facilitar os cálculos na resolução do determinante supõe-se $k_1=k_2=k$ e $m_1=m_2=m$. Encontra-se então a seguinte equação:

$$(\omega_o^2)^2 - \frac{3k}{m}\,\omega_o^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

As duas raízes são:

$$\omega_{o_1}^2 = (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})\,\frac{k}{m} = 0.382\,\frac{k}{m}$$

$$\omega_{o_2}^2 = (\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})\,\frac{k}{m} = 2.618\,\frac{k}{m}$$

que são as frequências naturais do sistema.

$$\omega_{o_1} = 0.618\,\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_{o_2} = 1.618\,\sqrt{\frac{k}{m}}$$

A menor destas duas frequências é chamada de frequência fundamental e corresponde ao primeiro modo de vibração.

Substituindo-se os valores das frequências nas equações (3.9), encontram-se os modos de vibração.

Assim, para $\omega_{o_1}^2 = 0.382\,\frac{k}{m}$ tem-se a seguinte relação entre V_1 e V_2: $\frac{V_1}{V_2} = 0.618$ e para $\omega_{o_2}^2 = 2.618\,\frac{k}{m}$, tem-se: $\frac{V_1}{V_2} = -1.618$.

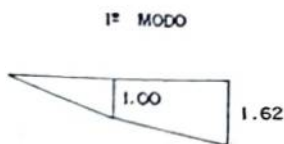
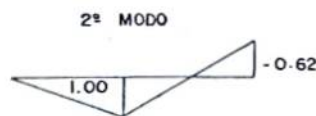



Fig. 3.5. Modos de vibração e frequências naturais - S2GL

Para a representação dos modos usa-se uma amplitude arbitrária. Considerando-se a amplitude do deslocamento da massa m_1 igual à unidade encontram-se os dois modos representados na fig. 3.5 e que podem ser chamados de ϕ_1 e ϕ_2.

Exemplo 3.3. Admitindo-se, para o pêndulo acoplado do exemplo 3.2, as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= V_1 \cos(\omega_0 t - \alpha) \\ \theta_2 &= V_2 \cos(\omega_0 t - \alpha) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Fazendo-se a substituição na equação de movimento (3.6) encontram-se as frequências naturais e os modos de vibração, que são:

$$\omega_{o_1} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \omega_{o_2} = \sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}\frac{a^2}{\ell^2}}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = 1 \qquad \frac{V_1}{V_2} = -1$$

No primeiro modo os dois pêndulos têm a mesma amplitude e a mola não é estendida; no segundo eles movem-se em oposição e aparecerá um nó no ponto médio da mola. Eles estão representados na fig. 3.6.

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.0 \end{Bmatrix}$$

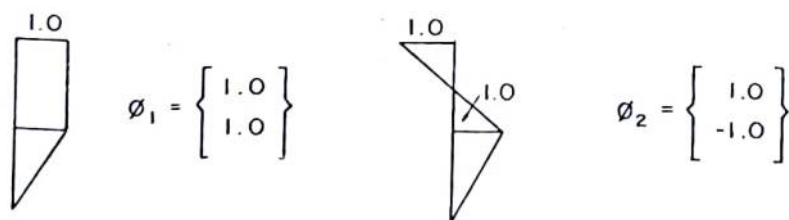



Fig. 3.6. Exemplo 3.3

Exemplo 3.4. O sistema da fig. 3.7a possui duas massas diferentes interligadas por molas. Ele é definido pelos deslocamentos v_1 e v_2 das massas e sua equação de movimento, fig. 3.7b, vem a ser:

$$\begin{aligned} m\ddot{v}_1 + 2kv_1 - kv_2 &= 0 \\ 2m\ddot{v}_2 - kv_1 + 2kv_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Utilizando-se as expressões (3.8) como soluções do sistema e substituindo-as na equação (3.11), encontram-se as seguintes frequências e modos:

$$\omega_{o_1}^2 = 0.634 \frac{k}{m} \qquad \omega_{o_2}^2 = 2.366 \frac{k}{m}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = 0.732 \quad \left(\frac{V_2}{V_1} = 1,366\right) \qquad \frac{V_1}{V_2} = -2.732 \quad \left(\frac{V_2}{V_1} = -0,366\right)$$

Os modos estão representados na fig. 3.7c.

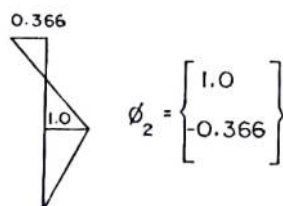
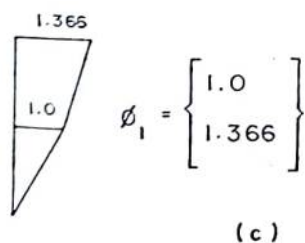
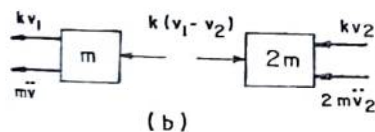
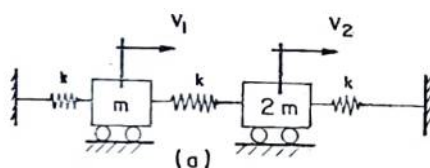



Fig. 3.7. Exemplo 3.4

3.2.1.2. RESPOSTA PARA UM S2GL

Após os cálculos das frequências naturais e os modos de vibração pode-se obter a resposta de um sistema devido às condições iniciais. Esta resposta é obtida pela superposição dos modos individuais onde cada modo é tido como um S1GL independente.

Considera-se como exemplo um S2GL sob vibração livre, cujas frequências naturais são ω_{o_1} e ω_{o_2} e os dois modos de vibração dados pelas amplitudes ϕ_{11} e ϕ_{21}, ϕ_{12} e ϕ_{22}. Os deslocamentos serão dados pela solução da equação de movimento de um S1GL, sob vibração livre, sendo:

$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \phi_{11}\cos(\omega_{o_1} t-\alpha_1)+\phi_{12}\cos(\omega_{o_2} t-\alpha_2) \\
v_2 &= \phi_{21}\cos(\omega_{o_1} t-\alpha_1)+\phi_{22}\cos(\omega_{o_2} t-\alpha_2)
\end{aligned}
\qquad (3.12)
$$

Desenvolvendo-se os termos em senos e cosenos, tem-se:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= d_1\phi_{11}\cos \omega_{o_1} t+d_2\phi_{12}\cos \omega_{o_2} t+c_1\phi_{11}\,\text{sen}\ \omega_{o_1} t+ \\
&\quad +c_2\phi_{12}\,\text{sen}\ \omega_{o_2} t \\
v_2 &= d_1\phi_{21}\cos \omega_{o_1} t+d_2\phi_{22}\cos \omega_{o_2} t+c_1\phi_{21}\,\text{sen}\ \omega_{o_1} t+ \\
&\quad +c_2\phi_{22}\,\text{sen}\ \omega_{o_2} t
\end{aligned}
\qquad (3.13)
$$

onde d_1, d_2, c_1 e c_2 são constantes a serem determinadas pela aplicação das condições iniciais.

Em um tempo t=0, o sistema parte do repouso ($\dot{v}_{10}=\dot{v}_{20}=0$) e cada massa possui um deslocamento inicial v_1 e v_2, respectivamente. Com estas condições substituídas nas expressões (3.13), encontram-se c_1 e c_2 nulos e d_1 e d_2 dados pelas seguintes ex-

$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix}$, $\phi_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix}$

pressões:

$$d_1 = \frac{\phi_{22} v_{10} - \phi_{12} v_{20}}{\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}} \qquad d_2 = \frac{\phi_{11} v_{20} - \phi_{21} v_{10}}{\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}} \qquad (3.14)$$

Fazendo-se $\phi_{11} = \phi_{12} = 1$, tem-se uma solução geral para d_1 e d_2, dadas a seguir:

$$d_1 = \frac{\phi_{22} v_{10} - v_{20}}{\phi_{22} - \phi_{21}} \qquad d_2 = \frac{-\phi_{21} v_{10} + v_{20}}{\phi_{22} - \phi_{21}} \qquad (3.15)$$

Finalmente, com os valores destas constantes chega-se à resposta do sistema que compreende dois harmônicos simples. A predominância de um sobre o outro dependerá somente das condições iniciais. Colocando-se, para o exemplo dado, a resposta sob forma vetorial, tem-se:

$$\vec{v} = d_1 \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} \cos \omega_{o_1} t + d_2 \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} \cos \omega_{o_2} t \qquad (3.16)$$

Diz-se que o movimento só será periódico quando a relação entre as duas frequências naturais ($\omega_{o_2}/\omega_{o_1}$) for um número inteiro, ou se:

$$\frac{\omega_{o_2}}{\omega_{o_1}} = \frac{n_1}{n_2}$$

onde n_1 e n_2 são números inteiros.

Derivando-se as expressões (3.13) em relação ao tempo,

$$\dot{v}_1 = -d_1\omega_{o_1}\phi_{11} \operatorname{sen} \omega_{o_1} t - d_2\omega_{o_2}\phi_{12} \operatorname{sen} \omega_{o_2} t + c_1\omega_{o_1}\phi_{11} \cos \omega_{o_1} t + c_2\omega_{o_2}\phi_{12} \cos \omega_{o_2} t$$

$$\dot{v}_2 = -d_1\omega_{o_1}\phi_{21} \operatorname{sen} \omega_{o_1} t - d_2\omega_{o_2}\phi_{22} \operatorname{sen} \omega_{o_2} t + c_1\omega_{o_1}\phi_{21} \cos \omega_{o_1} t + c_2\omega_{o_2}\phi_{22} \cos \omega_{o_2} t \qquad (3.17)$$

Considera-se agora que para $t=0$, as massas de um sistema partem com velocidades iniciais $\dot{v}_{10}$ e $\dot{v}_{20}$, respectivamente, e sem deslocamento inicial. Substituindo-se estas condições iniciais nas expressões (3.17) encontram-se d_1 e d_2 iguais a zero e c_1 e c_2 dadas por:

$$c_1 = \frac{\dot{v}_{10}\phi_{22} - \dot{v}_{20}}{\omega_{o_1}(\phi_{22} - \phi_{21})} \qquad c_2 = \frac{\dot{v}_{10}\phi_{21} - \dot{v}_{20}}{\omega_{o_2}(\phi_{21} - \phi_{22})} \tag{3.18}$$

Exemplo 3.5. O pêndulo do exemplo 3.2 é posto em movimento com as seguintes condições iniciais: $\theta_1(0)=A$ e $\theta_2(0)=0$. As frequências naturais e os modos de vibração foram calculados no exemplo 3.3.

Partindo-se diretamente das expressões (3.15), encontram-se os valores para d_1 e d_2. Substituindo-os na equação (3.16) a solução é a seguinte:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{A}{2}\cos\omega_{o_1}t + \frac{A}{2}\cos\omega_{o_2}t \\ \theta_2(t) &= \frac{A}{2}\cos\omega_{o_1}t - \frac{A}{2}\cos\omega_{o_2}t \end{aligned} \tag{3.19}$$

Reescrevendo-se estas equações, tem-se:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2})t\,\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})t \\ \theta_2(t) &= -A\,\mathrm{sen}(\frac{\omega_1-\omega_2}{2})t\,\mathrm{sen}(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})t \end{aligned} \tag{3.20}$$

Como $(\omega_1-\omega_2)$ é muito pequeno, $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ tem comportamento igual a $\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})t$ e $\mathrm{sen}(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})t$, respectivamente, com amplitudes variando lentamente, segundo mostra a fig. 3.8.

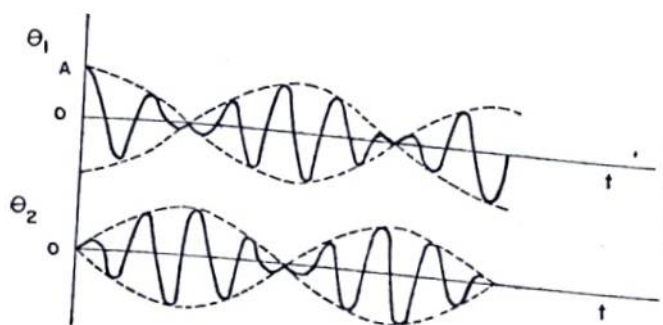



Fig. 3.8. Troca de energia entre pêndulos

Visto que o sistema é conservativo, existe uma transferência de energia entre os dois pêndulos.

Exemplo 3.6. Considera-se que o sistema do exemplo 3.4 é posto em movimento com cada massa possuindo uma velocidade inicial igual a $\dot{v}_{10}$ e $\vec{v}_0=\vec{0}$. Assim pode-se substituir diretamente os valores correspondentes nas expressões (3.18) e encontra-se:

$$c_1 = 0.789 \frac{\dot{v}_{10}}{\omega_{o_1}}$$

$$c_2 = 0.211 \frac{\dot{v}_{10}}{\omega_{o_2}}$$

A solução é dada por:

$$v_1 = 0.789 \frac{\dot{v}_{10}}{\omega_{o_1}} \text{ sen } \omega_{o_1} t + 0.211 \frac{\dot{v}_{10}}{\omega_{o_2}} \text{ sen } \omega_{o_2} t$$

$$v_2 = 1.078 \frac{\dot{v}_{10}}{\omega_{o_1}} \text{ sen } \omega_{o_1} t - 0.077 \frac{\dot{v}_{10}}{\omega_{o_2}} \text{ sen } \omega_{o_2} t \tag{3.21}$$

Exemplo 3.7. Um sistema qualquer de 2GL entra em movimento com as seguintes condições iniciais: $v_1(0)=v_{10}$; $v_2(0)=v_{10}$ e $\vec{\dot{v}}_0 = \vec{0}$. As

características do sistema são :

$$\omega_{0_1} = 1.166\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_{0_2} = 1.945\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.414 \end{bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.414 \end{bmatrix}$$

As equações de movimento são as seguintes:

$$v_1(t)=1.207v_{10}\cos\omega_{0_1}t-0.207v_{10}\cos\omega_{0_2}t$$
$$v_2(t)=0.5v_{10}\cos\omega_{0_1}t+0.5v_{10}\cos\omega_{0_2}t \qquad (3.22)$$

A partir destas equações pode-se fazer o gráfico de $v_1(t)/v_{10}$ versus t/T_{0_1}, sabendo-se que $T_{0_2}=0.6T_{0_1}$, fig. 3.9. O mesmo pode-se fazer em relação a $v_2(t)$.

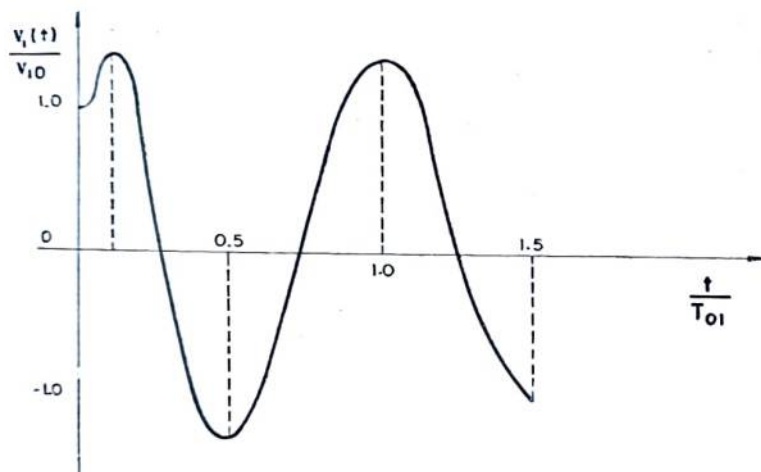



Fig. 3.9. $\frac{v_1(t)}{v_{10}} \times \frac{t}{t_{0_1}}$

Vê-se pelo gráfico que o movimento é periódico.

3.2.2. VIBRAÇÃO FORÇADA

A resposta de um S2GL sob vibração forçada é dada, levando-se em conta as frequências naturais e os modos naturais calculados anteriormente, pois estes são características do sistema e independem da excitação.

No gráfico da força contra o tempo, fig. 3.10, a carga atuante em $t=\tau$ é $F(\tau)$. Para um S2GL excitado por duas forças $F_1(t)$ e $F_2(t)$, as cargas que atuam em $t=\tau$ são $F_1(\tau)$ e $F_2(\tau)$. Nota-se que área sob a curva em um intervalo de tempo $d\tau$ é um impulso que causa um acréscimo na velocidade em τ. Assim:

$$d\dot{v}_1 = \frac{F_1(\tau)}{m_1}\,d\tau \qquad d\dot{v}_2 = \frac{F_2(\tau)}{m_2}\,d\tau \tag{3.23}$$

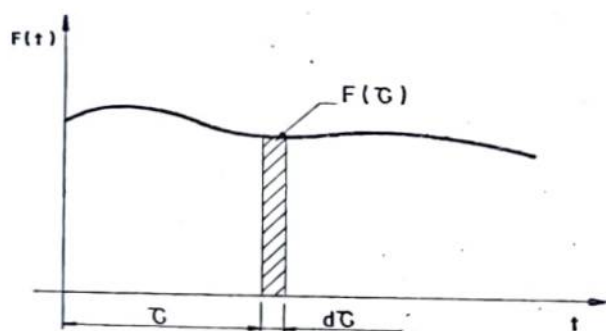



Fig. 3.10. Impulso $F(\tau)\cdot d\tau$

Considerando-se, assim, vibrações livres provocadas por essas variações de velocidade, eq. (2.32), e fazendo-se a superposição dos modos, as expressões para os deslocamentos elementares são:

$$\begin{aligned} dv_1 &= c_1 \operatorname{sen} \omega_{o_1}(t-\tau) + c_2 \operatorname{sen} \omega_{o_2}(t-\tau) \\ dv_2 &= c_1\phi_{21} \operatorname{sen} \omega_{o_1}(t-\tau) + c_2\phi_{22} \operatorname{sen} \omega_{o_2}(t-\tau) \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde c_1 e c_2 são constantes a serem determinadas.

Derivando-se as expressões (3.24) em relação ao tempo t, obtém-se:

$$d\dot{v}_1 = c_1 \omega_{o_1} \cos \omega_{o_1}(t-\tau) + c_2 \omega_{o_2} \cos \omega_{o_2}(t-\tau)$$

$$d\dot{v}_2 = c_1 \phi_{21} \omega_{o_1} \cos \omega_{o_1}(t-\tau) + c_2 \phi_{22} \omega_{o_2} \cos \omega_{o_2}(t-\tau) \qquad (3.25)$$

Pode-se então igualar as expressões (3.25) às (3.23) no tempo t=τ, obtendo-se:

$$c_1 = \frac{\frac{F_1(\tau)}{m_1}\phi_{22} - \frac{F_2(\tau)}{m_2}}{\omega_{o_1}(\phi_{22}-\phi_{21})} d\tau \qquad c_2 = \frac{\frac{F_1(\tau)}{m_1}\phi_{21} - \frac{F_2(\tau)}{m_2}}{\omega_{o_2}(\phi_{21}-\phi_{22})} d\tau \qquad (3.26)$$

Supõe-se que as cargas variam da mesma forma em relação ao tempo, tem-se então:

$$F_1(\tau) = F_{10} f(\tau) \quad ; \quad F_2(\tau) = F_{20} f(\tau) \qquad (3.27)$$

Substituindo-se os valores das cargas em c_1 e c_2, os deslocamentos totais de cada massa, em t, é a soma dos efeitos do impulso entre zero e t. Colocando-se a solução em forma vetorial, tem-se:

FAI₁

$$\vec{v} = \mathcal{C}_1 \phi_1 \int_0^t \omega_{o_1} f(\tau) \operatorname{sen} \omega_{o_1}(t-\tau) d\tau +$$

FAI₂

$$+ \mathcal{C}_2 \phi_2 \int_0^t \omega_{o_2} f(\tau) \operatorname{sen} \omega_{o_2}(t-\tau) d\tau \qquad (3.28)$$

onde $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são chamados de "coeficiente de participação modal" e são dados por:

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\frac{F_{10}}{m_1}\phi_{22} - \frac{F_{20}}{m_2}}{\omega_{o_1}^2(\phi_{22}-\phi_{21})} \qquad \mathcal{C}_2 = \frac{\frac{F_{10}}{m_1}\phi_{21} - \frac{F_{20}}{m_2}}{\omega_{o_2}^2(\phi_{21}-\phi_{22})} \tag{3.29}$$

Eles dependem da distribuição das forças de excitação e das propriedades do sistema.

Cada integral nos termos da expressão (3.28) é chamada de "fator de amplificação instantânea - $(FAI)_i$" e representa a amplificação de um S1GL de frequência ω_{o_i} submetido à mesma excitação $f(\tau)$.

A solução final para o deslocamento do sistema é dada a seguir:

$$\vec{v} = \mathcal{C}_1\phi_1(FAI)_1 + \mathcal{C}_2\phi_2(FAI)_2 \tag{3.30}$$

3.2.2.1. ESPECTRO DE RESPOSTA

Dado o sistema da fig. 3.11 constituído de duas massas m_1 e m_2 iguais a m, unidas por molas de constantes elásticas k. A massa m_1 está submetida a uma força externa, harmônica, F_{10} sen ωt.

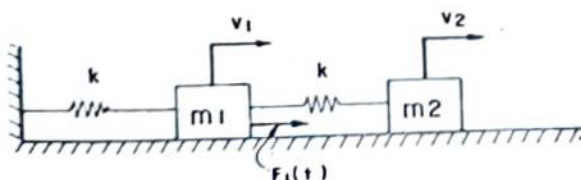



Fig. 3.11. S2GL sob vibração forçada

A equação de movimento para as massas torna-se:

$$m_1\ddot{v}_1 + 2kv_1 - kv_2 = F_{10}\text{sen } \omega t$$
$$m_2\ddot{v}_2 - kv_1 + kv_2 = 0 \qquad (3.31)$$

Utilizando-se o processo descrito na seção (3.2.1.1), para a determinação das frequências naturais e modos de vibração, encontra-se:

$$\omega^2_{o_1} = 0.382\ \frac{k}{m} \rightarrow \phi_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.62 \end{bmatrix}$$

$$\omega^2_{o_2} = 2.618\ \frac{k}{m} \rightarrow \phi_2 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -0.62 \end{bmatrix}$$

A resposta da equação de movimento segundo a expressão (3.30) é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0.724\ \frac{F_{10}}{k} \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.62 \end{bmatrix} (FAI)_1 + 0.276\ \frac{F_{10}}{k} \begin{bmatrix} 1.00 \\ -0.62 \end{bmatrix} (FAI)_2 \qquad (3.32)$$

O fator de amplificação instantânea é dado pela amplificação de um S1GL sob vibração forçada, sem amortecimento. Assim:

$$(FAI)_1 = \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_{o_1}})^2}\ \text{sen } \omega t \qquad (FAI)_2 = \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_{o_2}})^2}\ \text{sen } \omega t$$

Substituindo-se as expressões anteriores na expressão (3.32), tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{F_{10}}{k} \left[\begin{bmatrix} 0.724 \\ 1.172 \end{bmatrix} \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_{0_1}})^2} + \begin{bmatrix} 0.276 \\ -0.171 \end{bmatrix} \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_{0_2}})^2} \right] \text{sen } \omega t \qquad (3.33)$$

A partir desta expressão pode-se construir o espectro de resposta para o exemplo dado que está representado na fig. 3.12. Nota-se, a partir do gráfico, que quando ω é aproximadamente igual a zero, as duas massas comportam-se estaticamente, ou seja, os seus deslocamentos são iguais ao deslocamento estático da primeira mola.

Quando ω torna-se igual a uma das duas frequências naturais do sistema, as amplitudes das massas tornam-se infinitamente grandes. Verifica-se, portanto, que existem duas condições de ressonância, isto é, quando a frequência da força perturbadora coincide com uma das frequências naturais, passando o sistema a vibrar no seu correspondente modo de vibração.

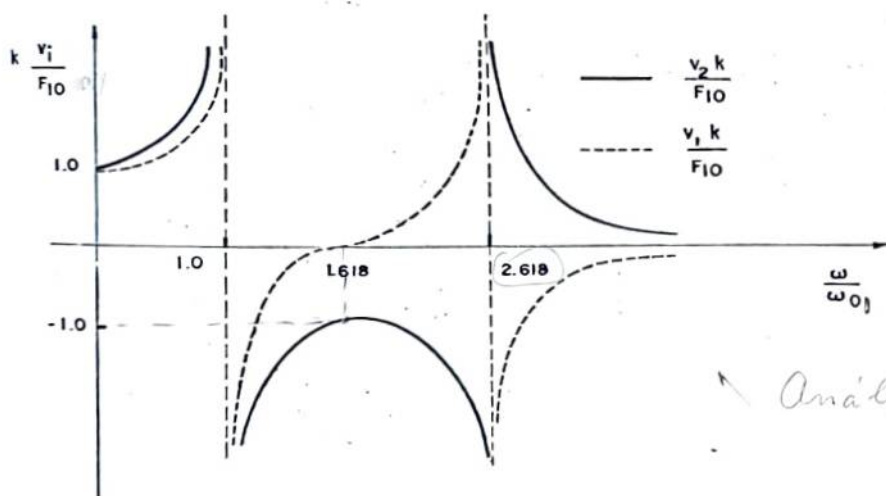



Fig. 3.12. Espectro de resposta para um S2GL

A partir da segunda condição de ressonância, a frequên-

cia ω passa a crescer indefinidamente e as amplitudes diminuem até tornarem-se nulas .

Outro fator importante que se nota no gráfico é quando o deslocamento da primeira massa se anula a frequência da força excitadora torna-se igual a frequência da segunda mola ($\omega=\sqrt{k_2/m_2}$). Isto quer dizer que a força atuante sobre a massa m_1 produz somente vibrações na massa m_2. A amplitude referente a esta massa é igual ao deslocamento estático da primeira mola. No caso, $k_1=k_2$ e $m_1=m_2$.

O comportamento descrito acima refere-se a um sistema chamado de "absorvedor de vibrações", em que m_2 e k_2 são selecionados de acordo com a força de excitação e os valores de m_1 e k_1. Tem-se como exemplo o pêndulo centrífugo.

O espectro de resposta analisado é válido para qualquer sistema com dois graus de liberdade com F_2 diferente de zero. Se, no entanto, estiverem presentes as duas forças de excitação, F_1 e F_2, elas deverão ter a mesma função de tempo, f(t).

Exemplo 3.8. A fig. 3.13a representa um pórtico cujas vigas são rígidas de massas m e 1/2m; a rigidez das barras são k e 1/2k. Este sistema é equivalente ao da fig. 3.13b considerando-se estas mesmas características para as massas e as molas. Sua equação de movimento é então:

$$2m\ddot{v}_1 + 3kv_1 - kv_2 = 2F_1(t)$$
$$m\ddot{v}_2 - kv_1 + kv_2 = 0 \qquad (3.34)$$

Suas frequências naturais e seus modos de vibração são:

$$\omega_{o_1}^2 = \frac{k}{2m} \qquad \omega_{o_2}^2 = 2\,\frac{k}{m}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

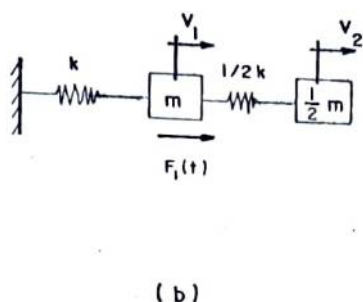
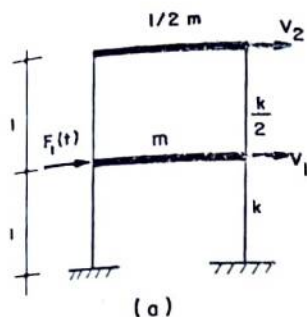



Fig. 3.13. Exemplo 3.8

Substituindo-se diretamente os valores encontrados anteriormente, nas expressões (3.29) e em seguida na solução (3.30) tem-se:

$$v_1(t) = \frac{2}{3}\frac{F_{10}}{k}(FAI)_1 + \frac{1}{3}\frac{F_{10}}{k}(FAI)_2$$
$$v_2(t) = \frac{4}{3}\frac{F_{10}}{k}(FAI)_1 - \frac{1}{3}\frac{F_{10}}{k}(FAI)_2 \qquad (3.35)$$

Vê-se que a contribuição do primeiro modo é cerca de 66% aproximadamente do total, pois a influência do (FAI) é também significante.

Exemplo 3.9. No exemplo anterior, considera-se que também exista uma força $F_2(t) = \frac{1}{2} F_1(t)$ atuando na direção do deslocamento v_2. Sua equação de movimento é:

$$2m\ddot{v}_1 + 3kv_1 - kv_2 = 2F_1(t)$$
$$m\ddot{v}_2 - kv_1 + kv_2 = F_1(t) \qquad (3.36)$$

O sistema possui as mesmas características calculadas anteriormente. As soluções são:

$$v_1(t) = \frac{4}{3}\frac{F_{10}}{k}(FAI)_1 + \frac{1}{6}\frac{F_{10}}{k}(FAI)_2$$

$$v_2(t) = \frac{8}{3}\frac{F_{10}}{k}(FAI)_1 - \frac{1}{6}\frac{F_{10}}{k}(FAI)_2 \qquad (3.37)$$

Fazendo-se $(FAI)_1=(FAI)_2=1$, encontra-se os seguintes deslocamentes:

$$v_1(t) = \frac{3}{2}\frac{F_{10}}{k}$$

$$v_2(t) = \frac{15}{6}\frac{F_{10}}{k}$$

Comparando-se esses deslocamentos com a contribuição do primeiro modo $(\frac{4}{3}\frac{F_{10}}{k})$, vê-se que o primeiro tem uma contribuição bem maior devido ao fato de estar mais próximo do modo natural.

Exemplo 3.10. Considerando-se que o sistema da fig. 3.7 está excitado por uma força F_{10}sen ωt atuando na primeira massa, sua equação de movimento torna-se:

$$m\ddot{v}_1 + 2kv_1 - kv_2 = F_{10}\text{sen }\omega t$$

$$2m\ddot{v}_2 - kv_1 + 2kv_2 = 0 \qquad (3.38)$$

A solução final desta equação, considerando-se os coeficientes de participação e os fatores de amplificação instantânea, é:

$$v_1(t) = \frac{F_{10}}{k}\left[\frac{0.333}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{o_1}}\right)^2} + \frac{0.333}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{o_2}}\right)^2}\right] \text{sen } \omega t$$

$$v_2(t) = \frac{F_{10}}{k}\left[\frac{0.455}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{o_1}}\right)^2} - \frac{0.122}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{o_2}}\right)^2}\right] \text{sen } \omega t \qquad (3.39)$$

A curva de resposta da frequência está representada na fig. 3.14.

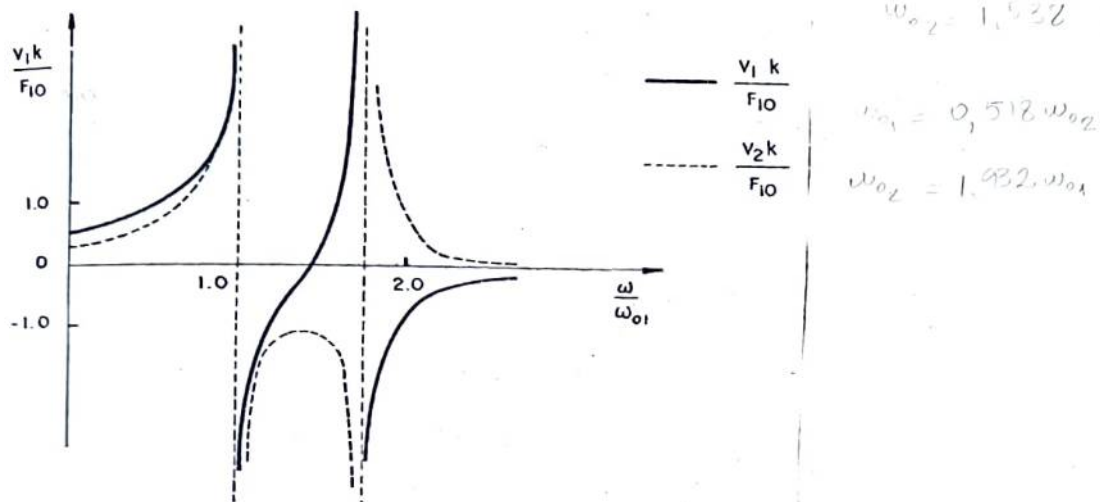



Fig. 3.14. Resposta forçada do Exemplo 3.10

Comparando-se esta curva com a curva da fig. 3.12, verifica-se que estes dois sistemas têm comportamentos parecidos, diferindo apenas nos valores das amplitudes.

4. EQUAÇÃO DE MOVIMENTO SOB FORMA MATRICIAL

A equação de movimento, seja para S2GL como para SNGL, pode ser colocada sob forma matricial. Isto visa, principalmente, os SNGL devido à dificuldade de se manusear um grande número de equações. Esta formulação facilita sobremodo o uso de computadores no cálculo das vibrações.

Para que se entenda melhor os diversos conceitos necessários para a formulação da equação de movimento, sob notação matricial, utiliza-se como exemplo um S2GL. Depois estes conceitos são generalizados para SNGL.

Toma-se como exemplo o sistema da fig. 3.1, cujo equilíbrio dinâmico para as duas massas pode ser escrito como:

$$F_{I_1} + F_{E_1} = F_1(t)$$
$$F_{I_2} + F_{E_2} = F_2(t) \qquad (4.1)$$

Colocando-se sob notação matricial, tem-se:

$$\vec{F}_I + \vec{F}_E = \vec{F}(t) \quad , \qquad (4.2)$$

onde $\vec{F}_I$ e $\vec{F}_E$ são vetores que representam as forças de inércia e elástica da mola, respectivamente, que atuam no sistema.

Pela própria definição destas forças obtém-se a equação de movimento do sistema, sob forma de matriz :

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\vec{v}} + \underset{\sim}{K}\vec{v} = \vec{F}(t) \quad , \qquad (4.3)$$

onde $\underset{\sim}{M}$ = matriz de massa do sistema
$\vec{v}$ = vetor deslocamento

$\underset{\sim}{K}$ = matriz de rigidez

$\vec{F}(t)$ = vetor de carga

A equação (4.3) é a forma matricial das equações (3.1).

As matrizes apresentadas definem completamente as propriedades dinâmicas do sistema; as matrizes $\underset{\sim}{M}$ e $\underset{\sim}{K}$ podem ser obtidas por equilíbrio dinâmico das forças, eq. (4.1), ou como mostrado a seguir.

4.1. MATRIZ DE RIGIDEZ E MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

A força elástica em uma coordenada i, de uma estrutura qualquer, é definida como:

$$F_{E_i} = k_{ij} \; v_j \tag{4.4}$$

ou

$$\vec{F}_E = \underset{\sim}{K} \; \vec{v} \tag{4.5}$$

onde k_{ij} é o coeficiente de influência de rigidez e é definido como a força em i devido a um deslocamento unitário em j e nulos nos demais graus de liberdade.

A matriz de rigidez pode então ser encontrada por sua própria definição. Para o sistema da fig. 3.1, fazendo-se $v_1=1$ e $v_2=0$, fig. 4.1a, as forças para manter estes deslocamentos são:

$$\begin{aligned} F_{E_1} &= k_1 + k_2 \\ F_{E_2} &= -k_2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ao contrário, fazendo-se $v_1=0$ e $v_2=1$, fig. 4.1b, as forças tornam-se:

$$F_{E_1} = -k_2$$
$$F_{E_2} = k_2 \qquad (4.7)$$

Pode-se assim, montar a matriz de rigidez do sistema:

$$\underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

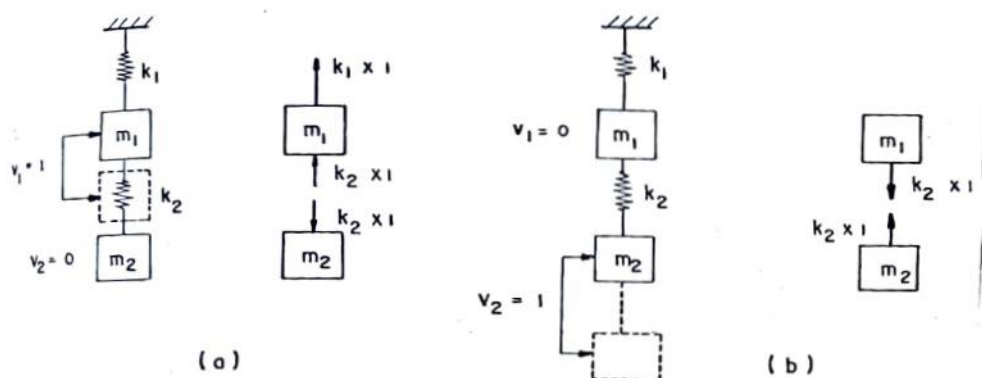



Fig. 4.1. S2GL:(a) $v_1=1$, $v_2=0$; (b) $v_1=0$, $v_2=1$

Outra forma de se calcular a matriz de rigidez é determinando-se a matriz de flexibilidade e invertendo-a. A definição do coeficiente de influência de flexibilidade, s_{ij}, é o deslocamento em i devido a uma carga unitária em j e nula nas demais direções. Considerando-se as forças aplicadas F_1 e F_2, os deslocamentos são :

$$v_1 = s_{11}F_1 + s_{12}F_2$$
$$v_2 = s_{21}F_1 + s_{22}F_2 \qquad (4.9)$$

Sob forma matricial, tem-se:

$$\vec{v} = \underset{\sim}{S} \vec{F} \tag{4.10}$$

onde $\underset{\sim}{S}$ é a matriz de flexibilidade.

Substituindo-se a expressão (4.5) em (4.10), obtém-se:

$$\vec{v} = \underset{\sim}{S} \underset{\sim}{K} \vec{v} \tag{4.11}$$

onde

$$\underset{\sim}{S} \underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{I} \tag{4.12}$$

Então, pela definição da inversa de uma matriz e considerando-se que as matrizes $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{K}$ são quadradas, tem-se da expressão (4.12) que:

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{K}^{-1} \tag{4.13}$$

Tanto a matriz de flexibilidade como a de rigidez são simétricas e positivas definidas. Estas considerações são justificadas pelo "Teorema da Reciprocidade" e pela "Energia de Deformação", respectivamente.

4.1.1. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

A energia de deformação de uma estrutura é o trabalho dos esforços em face das deformações, então:

$$U = \frac{1}{2} \Sigma F_i v_i = \frac{1}{2} \vec{F}^T \vec{v} \tag{4.14}$$

Substituindo-se a expressão (4.10) em (4.14), esta última torna-se:

$$U = \frac{1}{2} \vec{F}^T \underset{\sim}{S} \vec{F} \tag{4.15}$$

Fazendo-se agora a transposição da expressão (4.14), seu resultado não se altera e tem-se a seguinte expressão:

$$U = \frac{1}{2}\, \vec{v}^T \vec{F} \qquad (4.16)$$

Sabendo-se que $\vec{F} = \vec{F}_E$ e substituindo-se a expressão (4.5) na (4.16), obtêm-se para a energia de deformação a seguinte expressão:

$$U = \frac{1}{2}\, \vec{v}^T \, \underset{\sim}{K} \, \vec{v} \qquad (4.17)$$

Finalmente, como se sabe, a energia de deformação é uma grandeza essencialmente positiva, por isso:

$$\vec{F}^T \, \underset{\sim}{S} \, \vec{F} > 0 \quad \text{e} \quad \vec{v}^T \, \underset{\sim}{K} \, \vec{v} > 0 \qquad (4.18)$$

e assim as matrizes $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{K}$ são ditas positivas definidas, pois só assim elas poderão satisfazer as condições anteriores para quaisquer vetores de $\vec{F}$ e $\vec{v}$.

4.1.2. Teorema da Reciprocidade

Supondo-se que uma estrutura está submetida a dois conjuntos de cargas com seus respectivos deslocamentos resultantes, considerando-se que a carga $\vec{F}_I$ é a primeira a atuar seguida da carga F_{II}, o trabalho de deformação total é o seguinte:

$$W_1 = \frac{1}{2}\, \vec{F}_I^T \, \vec{v}_I + \frac{1}{2}\, \vec{F}_{II}^T \, \vec{v}_{II} + \vec{F}_I^T \, \vec{v}_{II} \qquad (4.19)$$

onde a última parcela não tem o fator 1/2 porque as cargas $\vec{F}_I$ já existiam com toda a sua intensidade quando ocorreram os deslocamentos $\vec{v}_{II}$.

Se agora a aplicação das cargas é invertida, tem-se:

$$W_2 = \frac{1}{2} \vec{F}_{II}^T \vec{v}_{II} + \frac{1}{2} \vec{F}_I^T \vec{v}_I + \vec{F}_{II}^T \vec{v}_I \qquad (4.20)$$

Os trabalhos W_1 e W_2 são iguais pois a deformação da estrutura independe da sequência do carregamento. Logo:

$$\vec{F}_I^T \vec{v}_{II} = \vec{F}_{II}^T \vec{v}_I \qquad (4.21)$$

Este é o Teorema de Betti, que nos diz: "o trabalho das forças do primeiro sistema em presença das deformações causadas pelo segundo é igual ao trabalho das ações do segundo sistema, associadas aos deslocamentos causados pelo primeiro".

Escrevendo-se a expressão (4.10) para os dois casos de carga e substituindo-se em (4.21), obtém-se:

$$\vec{F}_I^T \underset{\sim}{S} \vec{F}_{II} = \vec{F}_{II}^T \underset{\sim}{S} \vec{F}_I \qquad (4.22)$$

Como os termos dessa igualdade exprimem trabalho pode-se fazer a transposição de um dos lados da equação, pois assim o trabalho da estrutura não se altera. Chega-se então à conclusão de que $\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{S}^T$, ou seja, a matriz de flexibilidade é simétrica, $s_{ij}=s_{ji}$. Esta expressão está de acordo com o Teorema de Maxwell das deformações recíprocas. Fazendo-se estas mesmas aplicações para a matriz de rigidez prova-se a sua simetria.

4.2. MATRIZ DE MASSA

O vetor das forças de inércia, para um S2GL, é definido como:

$$\begin{bmatrix} F_{I_1} \\ F_{I_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{bmatrix} \qquad (4.23)$$

onde o coeficiente m_{ij} é chamado de coeficiente de influência de massa e é definido como a força em i devida a uma "aceleração unitária" em j e nula nos demais graus de liberdade.

O procedimento mais simples para definir esta matriz é idealizar uma estrutura cuja massa total está concentrada em pontos cujos deslocamentos de translação são definidos.

Toma-se como exemplo a viga da fig. 4.2a. A massa de cada segmento está concentrada nos nós 1 e 2. Assim, a massa total em cada ponto é a soma das contribuições de cada segmento. E como somente os deslocamentos verticais são definidos, a matriz é diagonal. Pois, pela própria definição, a força de inércia devida a uma aceleração unitária em 1 é sua própria massa. De acordo com a fig. 4.2a tem-se:

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad \text{onde} \qquad \begin{aligned} m_1 &= m_{1a} + m_{1b} \\ m_2 &= m_{2b} + m_{2c} \end{aligned}$$

Se além da translação tem-se a rotação como grau de liberdade em cada ponto, pode-se eliminá-lo por condensação estática.

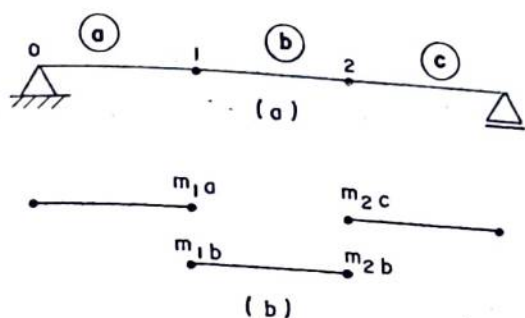



Fig. 4.2. Massas concentradas em nós de uma viga

Agora, quando a matriz de massa não é diagonal as massas são ditas acopladas e a matriz é simétrica e positiva definida.

Exemplo 4.1. O cálculo das matrizes de massa e de rigidez, da viga do exemplo 3.1, é feito segundo a fig. 4.3 a e b, c e d, respectivamente.

Os coeficientes de massa são:

$$m_{11} = (\overline{m}_1+\overline{m}_2)\ \frac{h}{3}$$

$$m_{21} = \overline{m}_2\ \frac{h}{6}$$

$$m_{12} = \overline{m}_2\ \frac{h}{6}$$

$$m_{22} = \overline{m}_2\ \frac{h}{3}$$

Para os coeficientes de rigidez faz-se um equilíbrio de forças nas molas considerando-se a fig. 4.4.

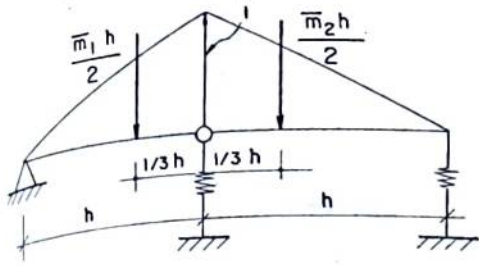
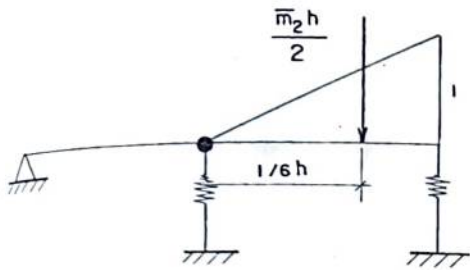
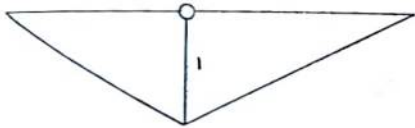
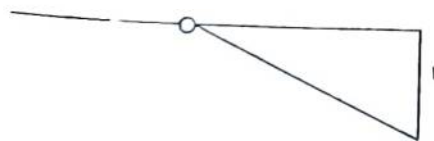
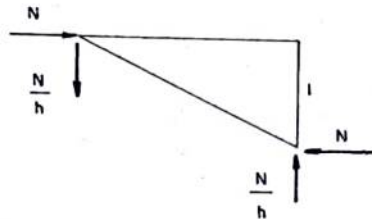
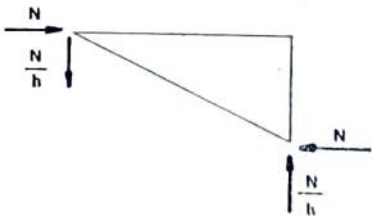
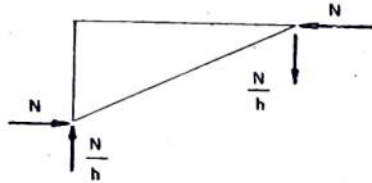



Fig. 4.3. Exemplo 4.1

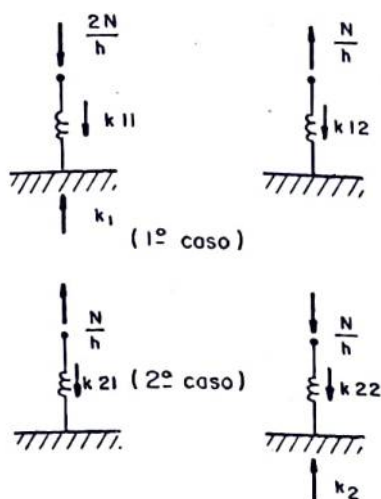



Fig. 4.4. Equilíbrio de forças

$$k_{11} = k_1 - \frac{2N}{h} \qquad k_{12} = \frac{N}{h}$$

$$k_{21} = \frac{N}{h} \qquad k_{22} = k_2 - \frac{N}{h}$$

As matrizes têm a seguinte forma:

$$\underset{\sim}{M} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2(m_1+m_2) & m_2 \\ m_2 & 2m_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} k_1 - \frac{2N}{h} & \frac{N}{h} \\ \frac{N}{h} & k_2 - \frac{N}{h} \end{bmatrix}$$

Observa-se que as matrizes, $\underset{\sim}{K}$ e $\underset{\sim}{M}$, são simétricas e quadradas.

Exemplo 4.2. A matriz de rigidez do pórtico do exemplo 3.8 é cal

culada para a fig. 4.5, e é da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} \frac{3k}{2} & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & \frac{k}{2} \end{bmatrix} = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

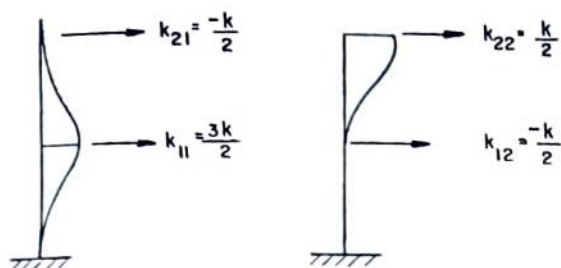



Fig. 4.5. Exemplo 4.2

Invertendo-se a matriz de rigidez encontra-se a matriz de flexibilidade. Assim:

$$\underset{\sim}{S} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4.3. AUTOVALORES E AUTOVETORES

Para um sistema sob vibração livre não amortecida de 2GL a equação de movimento (3.3) na forma matricial torna-se:

$$\underset{\sim}{M} \ddot{\vec{v}} + \underset{\sim}{K} \vec{v} = \underset{\sim}{0} \qquad (4.24)$$

Colocando-se as expressões (3.4) em forma de matriz,

$$\vec{v} = \phi \cos(\omega_o t-\alpha) \qquad \ddot{\vec{v}} = -\phi\, \omega_o^2 \cos(\omega_o t-\alpha) \qquad (4.25)$$

onde ϕ é o vetor dos deslocamentos modais. Substituindo-se a expressão (4.25) na equação (4.24) encontra-se:

$$-\omega_o^2\, \underset{\sim}{M}\, \phi + \underset{\sim}{K}\, \phi = 0 \qquad (4.26)$$

Multiplicando-se os termos dessa equação por $\underset{\sim}{M}^{-1}$ e colocando-se $\vec{\phi}$ em evidência obtêm-se:

$$(\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}-\omega_o^2\underset{\sim}{I})\,\phi = 0 \qquad (4.27)$$

Notando-se que ϕ não pode ser nulo, esta solução só se torna possível se o seu determinante for nulo. Então,

$$|\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}-\omega_o^2\underset{\sim}{I}| = 0 \qquad (4.28)$$

Esta equação é conhecida como "equação característica" e suas raízes são os valores característicos, ou autovalores, e correspondem ao quadrado das frequências naturais, no caso, $\omega_{o_1}^2$ e $\omega_{o_2}^2$. A cada uma destas raízes corresponde um vetor característico ϕ, ou autovetor, que representa o modo de vibração.

Sabe-se que as matrizes $\underset{\sim}{M}$ e $\underset{\sim}{K}$ são simétricas e positivas definidas, mas o produto $\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}=\underset{\sim}{H}$ não apresenta estas características. Contudo, se os autovalores de $\underset{\sim}{H}$ são positivos, diz-se que esta matriz é simétrica e positiva definida; se são negativos, ela é negativa definida; se alguns são positivos e outros negativos, ela é dita indefinida. Finalmente, se todos os autovalores são positivos e pelo menos um é zero, a matriz é positiva semi-definida; e se todos são negativos e pelo menos um é zero,

a matriz é negativa semi-definida.

Como as frequências naturais são sempre valores reais e positivos, a matriz $\underset{\sim}{H}$ é simétrica e positiva definida.

Exemplo 4.3. Considerando-se no exemplo 3.1 que $m_1=m_2=m$, $k_1=k_2=k$ e $N=0$, as matrizes de massa e rigidez do exemplo 4.1 tornam-se:

$$\underset{\sim}{M} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4m & m \\ m & 2m \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz de massa é:

$$\underset{\sim}{M}^{-1} = \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizando-se a equação (4.28), encontra-se a equação característica que nos dá os autovalores e autovetores, assim:

$$\omega_0^4 - \frac{36}{7}\frac{k}{m}\omega_0^2 + \frac{252}{49}\frac{k^2}{m^2} = 0 \qquad (4.29)$$

$$\therefore \left[\begin{array}{ll} \omega_{0_1} = 1.166\sqrt{\dfrac{k}{m}} & \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.414 \end{bmatrix} \\ \\ \omega_{0_2} = 1.945\sqrt{\dfrac{k}{m}} & \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.415 \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

A configuração dos modos está representada na fig. 4.6.

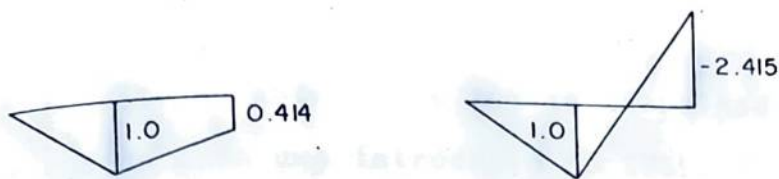



Fig. 4.6. Configuração dos modos

5. SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE (SVGL)

5.1. EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Nos capítulos anteriores tem-se trabalhado apenas com S2GL, que é tido como uma introdução ao SVGL. Neste, as equações são manipuladas de modo semelhante e as dificuldades aumentam à medida que o número de equações aumenta, ou seja, de acordo com o número de graus de liberdade. Por isto é que normalmente se trabalha com as equações sob forma matricial.

Por exemplo, para uma estrutura qualquer cujo movimento é definido por N deslocamentos, que por equilíbrio dinâmico entre as forças externas e internas resulta em um sistema de N equações, sendo N um número finito. A equação de movimento colocada matricialmente é dada por:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \vdots \\ \ddot{v}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_N(t) \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

ou $$\underset{\sim}{M}\,\ddot{\vec{v}} + \underset{\sim}{K}\,\vec{v} = \vec{F}(t) \qquad (5.2)$$

As matrizes $\underset{\sim}{M}$ e $\underset{\sim}{K}$ foram descritas no capítulo anterior, de ordem $(N \times N)$, determinadas do mesmo modo que o descrito e apresentam as mesmas propriedades.

Geralmente, a equação (5.2) é dita acoplada quando a matriz de massa ou rigidez não é diagonal. A diagonalização pode ser feita através de uma transformação de coordenadas, que é tratada no item referente à vibração forçada sem amortecimento.

5.2. VIBRAÇÃO LIVRE SEM AMORTECIMENTO

Se um sistema de NGL está vibrando livremente, pode-se fazer as seguintes substituições na equação (5.2):

$$v = \phi_i \cos(\omega_{o_i} t-\alpha) \quad \therefore \quad \ddot{v} = -\phi_i \omega_{o_i}^2 \cos(\omega_{o_i} t-\alpha)$$

$$\vec{F}(t) = 0$$

$$\therefore \quad (\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}-\omega_{o_i}^2 \underset{\sim}{I})\phi_i = 0 \tag{5.3}$$

Esta equação é equivalente a eq. (4.27) no modo i-ésimo, onde i varia de 1 a N. Ela é verdadeira para qualquer ϕ_i se ocorrer o seguinte:

$$|\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}-\omega_{o_i}^2 \underset{\sim}{I}| = 0 \tag{5.4}$$

Como já foi dito, esta é a equação característica onde são obtidos os autovalores e autovetores de $\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}$. Estes, extraindo a raiz quadrada, são as N frequências naturais ω_{o_i} em ordem crescente e os N modos de vibração ϕ_i .

Assim, o modo de vibração i é uma configuração ϕ_i segundo a qual o sistema pode permanecer em vibração livre, com uma frequência ω_{o_i}.

5.2.1. ORTOGONALIDADE

Supõe-se que ω_{o_i} e ω_{o_j} são soluções diferentes da expressão (5.3) e ϕ_i e ϕ_j, seus modos de vibração correspondentes. Assim, pode-se escrever:

$$\omega_{o_i}^2 \underset{\sim}{M} \phi_i = \underset{\sim}{K} \phi_i \qquad (5.5)$$

$$\omega_{o_j}^2 \underset{\sim}{M} \phi_j = \underset{\sim}{K} \phi_j \qquad (5.6)$$

Premultiplicando-se as expressões (5.5) e (5.6) pela transposta dos modos i e j, escreve-se:

$$\omega_{o_i}^2 \phi_j^T \underset{\sim}{M} \phi_i = \phi_j^T \underset{\sim}{K} \phi_i \qquad (5.7)$$

$$\omega_{o_j}^2 \phi_i^T \underset{\sim}{M} \phi_j = \phi_i^T \underset{\sim}{K} \phi_j \qquad (5.8)$$

Fazendo-se a transposta da expressão (5.7), encontra-se:

$$\omega_{o_i}^2 \phi_i^T \underset{\sim}{M} \phi_j = \phi_i^T \underset{\sim}{K} \phi_j \qquad (5.9)$$

devido à simetria de $\underset{\sim}{K}$ e $\underset{\sim}{M}$.

Subtraindo-se a expressão (5.9) de (5.8) obtém-se:

$$(\omega_{o_i}^2 - \omega_{o_j}^2) \phi_i^T \underset{\sim}{M} \phi_j = 0 \qquad (5.10)$$

Como $\omega_{o_i}^2 \neq \omega_{o_j}^2$ conclui-se que

$$\phi_i^T \underset{\sim}{M} \phi_j = 0 \qquad (5.11)$$

É evidente, então, da expressão (5.7) ou (5.8), que em consequência da condição (5.11), o seguinte:

$$\phi_i^T \underset{\sim}{K} \phi_j = 0 \qquad (5.12)$$

As expressões (5.11) e (5.12) definem a ortogonalidade dos mo-

dos para $i \neq j$.

Para $i=j$, a expressão (5.10) será satisfeita para quaisquer valores finitos das expressões (5.11) e (5.12), que são escritas como:

$$\phi_i^T \underset{\sim}{M} \phi_i = m_i$$
$$\phi_i^T \underset{\sim}{K} \phi_i = k_i \qquad (5.13)$$

onde m_i e k_i são denominados massa e rigidez generalizadas, respectivamente, associadas ao modo i.

Outra forma alternativa de se mostrar a ortogonalidade dos modos é através dos princípios básicos estruturais.

Admite-se, por exemplo, que um sistema está vibrando em um par de modos r e s, correspondentes a diferentes valores característicos $\omega_{o_r}^2$ e $\omega_{o_s}^2$. Nas duas condições, considera-se que o máximo deslocamento é atendido e que as massas estão em equilíbrio estático pela aplicação das forças de inércia, que são:

$$\vec{F}_{I_r} = \omega_{o_r}^2 \underset{\sim}{M} \phi_r$$
$$\vec{F}_{I_s} = \omega_{o_s}^2 \underset{\sim}{M} \phi_s \qquad (5.14)$$

Pelo Teorema de Betti, o trabalho realizado por um deslocamento virtual correspondente ao modo r quando s está vibrando é igual ao trabalho realizado por um deslocamento no modo s quando r está vibrando. Assim:

$$\omega_{o_s}^2 \, \phi_s^T \underset{\sim}{M} \phi_r = \omega_{o_r}^2 \, \phi_r^T \underset{\sim}{M} \phi_s$$

$$(\omega_{o_r}^2 - \omega_{o_s}^2)\phi_s^T \underset{\sim}{M} \phi_r = 0 \qquad (5.15)$$

ou

Desde que $\omega_{o_r}^2 \neq \omega_{o_s}^2$, quando $r \neq s$, então:

$$\phi_s^T \underset{\sim}{M} \phi_r = 0 \qquad (5.16)$$

A ortogonalidade em relação à matriz de rigidez é provada segundo o princípio dos trabalhos virtuais.

Para um sistema que está vibrando em um modo s, as forças de inércia e elástica estão em equilíbrio. A força de inércia para esta configuração está definida na segunda das expressões (5.14); a força elástica é a seguinte:

$$F_{E_s} = \underset{\sim}{K} \phi_s \qquad (5.17)$$

Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, o trabalho realizado por tais forças devido a um deslocamento virtual no modo r é nulo. Então:

$$\omega_{o_s}^2 \phi_s^T \underset{\sim}{M} \phi_r + \phi_s^T \underset{\sim}{K} \phi_r = 0 \qquad (5.18)$$

Da condição (5.16) encontra-se:

$$\phi_s^T \underset{\sim}{K} \phi_r = 0 \qquad (5.19)$$

5.2.2. NORMALIZAÇÃO

Como se sabe, os modos de vibração são obtidos, de forma arbitrária, da equação de frequência (5.3) e por isto não se têm valores absolutos para os elementos de cada vetor e sim va-

lores relativos.

Para a normalização dos modos pode-se utilizar uma das seguintes formas:

a) multiplicando-se cada um dos modos por uma constante de sorte que um de seus elementos seja unitário, pode-se utilizar o primeiro termo, mas frequentemente utiliza-se o valor relativo à máxima coordenada;

b) este é o processo comumente usado em computadores para análise de vibrações: chama-se $\hat{\phi}_i$ o vetor normalizado ou modo normal, obtido segundo a equação:

$$\hat{\phi}_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \phi_i \qquad (5.20)$$

Tirando-se da expressão (5.20) o valor de ϕ_i e substituindo na primeira das expressões em (5.13), obtém-se:

$$\hat{\phi}_i^T \underset{\sim}{M} \hat{\phi}_i = 1 \qquad (5.21)$$

que é a condição segundo a qual diz-se que os modos estão normalizados, segundo a matriz de massa - ortonormais.

Reunindo-se todos os modos de vibração em uma matriz quadrada em que cada modo constitui uma das colunas, obtém-se a chamada matriz modal $\underset{\sim}{\Phi}$.

$$\underset{\sim}{\Phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_N] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \dots & \phi_{3N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \qquad (5.22)$$

Formando-se os produtos $\underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Phi}$ e $\underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\Phi}$, os resultados são matrizes diagonalizadas visto que os termos fora da diagonal são nulos, devidos às condições de ortogonalidade. Os termos da diagonal correspondem à massa generalizada m_i e à rigidez generalizada k_i, respectivamente.

A reunião dos modos normalizados em uma matriz quadrada é chama-se matriz modal ponderada. A diagonalização da matriz de massa por esta matriz resulta na matriz identidade seguinte:

$$\bar{\underset{\sim}{\Phi}}^T \underset{\sim}{M} \bar{\underset{\sim}{\Phi}} = \underset{\sim}{I} \tag{5.23}$$

Para a matriz de rigidez toma-se o valor de $\bar{\phi}_i$ na expressão (5.20) e substitui-se em (5.5) encontrando-se:

$$\omega_{o_i}^2 \underset{\sim}{M} \bar{\phi}_i = \underset{\sim}{K} \bar{\phi}_i \tag{5.24}$$

Premultiplicando-se pela transposta de $\bar{\phi}_i$ e aplicando-se a condição (5.21), tem-se:

$$\bar{\phi}_i^T \underset{\sim}{K} \bar{\phi}_i = \omega_{o_i}^2 \tag{5.25}$$

Utilizando-se a matriz modal ponderada, a matriz de rigidez torna-se uma matriz diagonal de auto-valores chamada matriz espectral, isto é:

$$\bar{\underset{\sim}{\Phi}}^T \underset{\sim}{K} \bar{\underset{\sim}{\Phi}} = \underset{\sim}{\omega}_o^2 = \begin{bmatrix} \omega_{o_1}^2 & & 0 \\ & \omega_{o_2}^2 & \\ 0 & & \omega_{o_N}^2 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

Exemplo 5.1. O pórtico de vigas rígidas representado na fig. 5.1a possui três graus de liberdade que definem seu movimento segundo as coordenadas v_1, v_2 e v_3. Suas matrizes de massa e rigidez, fig. 5.1b, são da forma:

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

As frequências naturais e os modos de vibração são determinados pelas equações (5.3) e (5.4) resultando os seguintes valores:

$$\omega_{o_1} = 0.445\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_{o_2} = 1.247\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_{o_3} = 1.802\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.445 \\ -0.802 \end{bmatrix} \qquad \phi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{bmatrix}$$

Os modos estão representados na fig. 5.1c.

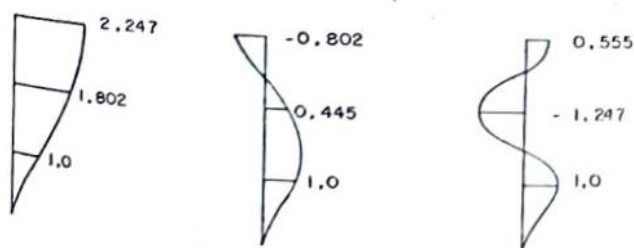
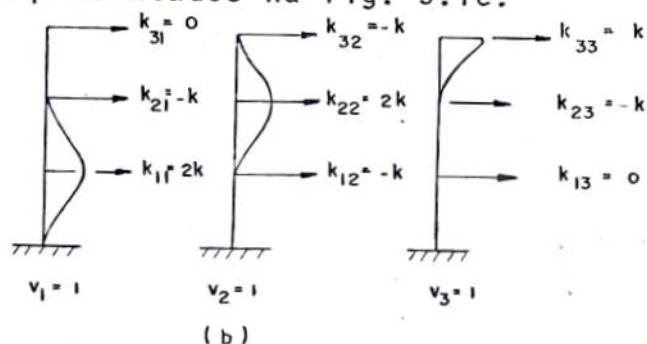
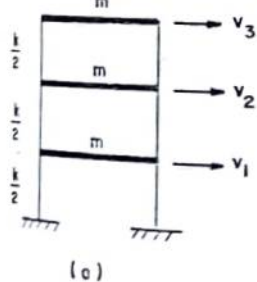



Fig. 5.1. Exemplo 5.1

Exemplo 5.2. Um sistema é composto por três corpos rígidos de massa m, interligados por duas molas como na fig. 5.2a. Os corpos são livres para se moverem segundo as coordenadas apresentadas na figura. Sua equação de movimento é escrita como:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5.27)$$

Utilizam-se as equações (5.3) e (5.4) e encontra-se a seguinte equação característica:

$$\omega_0^6 - 4\,\frac{k}{m}\,\omega_0^4 + 3\,\frac{k^2}{m^2}\,\omega_0^2 = 0 \qquad (5.28)$$

Os seguintes autovalores e respectivos autovetores são encontrados:

$$\omega_{0_1}^2 = 0 \qquad \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \phi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{0_2}^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_{0_3}^2 = 3\,\frac{k}{m} \qquad \phi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que uma das frequências é nula, tendo para o modo de vibração um movimento de corpo rígido, segundo a fig. 5.2b.

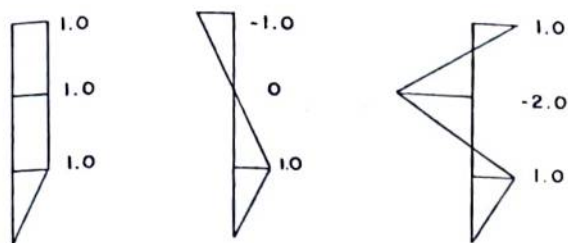
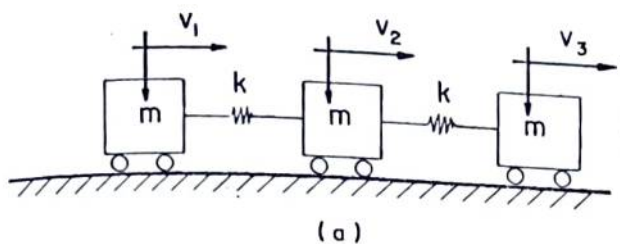



Fig. 5.2. Exemplo 5.2

5.2.3. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Como já foi dito anteriormente, o SNGL pode ser definido por N deslocamentos que são associados aos N modos de vibração. Devido às suas propriedades de ortogonalidade, estes modos descrevem satisfatoriamente, com boa aproximação, os deslocamentos com poucos termos.

De posse das frequências naturais e dos modos de vibração, a solução geral para um sistema sob vibração livre é a superposição de todos os modos, da forma:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \bar{c}_i \, \phi_i \cos(\omega_{o_i} t - \alpha) \quad , \qquad (5.29)$$

onde a constante $\bar{c}_i$ representa uma amplitude indeterminada do movimento harmônico. Desenvolvendo-se a expressão, tem-se:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i \operatorname{sen} \omega_{o_i} t + \sum_{i=1}^{N} d_i \phi_i \cos \omega_{o_i} t \qquad (5.30)$$

As 2N constantes são determinadas pela aplicação das condições iniciais.

Considerando-se que um sistema possui deslocamento inicial $\vec{v}_0$ e velocidade inicial $\dot{\vec{v}}_0$, substituindo-os na expressão (5.30), encontra-se:

$$\vec{v}_0 = \sum_{i=1}^{N} d_i \phi_i$$

$$\dot{\vec{v}}_0 = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \omega_{o_i} \, \phi_i \qquad (5.31)$$

Premultiplicando-se as duas equações pelo produto da transposta do modo ϕ_j e a matriz de massa $\underset{\sim}{M}$, então:

$$\phi_j^T \, \underset{\sim}{M} \, \vec{v}_0 = \phi_j^T \, \underset{\sim}{M} \sum_{i=1}^{N} d_i \phi_i$$

$$\phi_j^T \, \underset{\sim}{M} \, \dot{\vec{v}}_0 = \phi_j^T \, \underset{\sim}{M} \sum_{i=1}^{N} c_i \, \omega_{o_i} \, \phi_i \qquad (5.32)$$

Estas equações resultam em uma série onde os termos que correspondem a $i \neq j$ são nulos, devido à condição de ortogonalidade dos modos em relação à massa; pode-se encontrar os valores das constantes que são:

$$d_j = \frac{\phi_j^T \, \underset{\sim}{M} \, \vec{v}_0}{\phi_j^T \, \underset{\sim}{M} \, \phi_j}$$

$$c_j = \frac{\phi_j^T \, \underset{\sim}{M} \, \dot{\vec{v}}_0}{\phi_j^T \, \underset{\sim}{M} \, \phi_j} \, \frac{1}{\omega_{o_j}} \qquad (5.33)$$

Estes termos representam a expansão dos vetores $\vec{v}_0$ e $\dot{\vec{v}}_0/\omega_{0j}$ segundo os seus modos de vibração.

Exemplo 5.3. Considera-se que o pórtico do exemplo 5.1 está em vibração sob as seguintes condições iniciais:

$$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_{10} \qquad \text{e} \qquad \dot{\vec{v}}_0 = 0$$

As constantes da solução (5.30) são calculadas pelas expressões (5.33), tendo-se c_i iguais a zero e para os d_i tem-se:

$$d_1 = 0.543\ v_{10}$$

$$d_2 = 0.349\ v_{10}$$

$$d_3 = 0.108\ v_{10}$$

A solução final é dada por:

$$\vec{v}(t) = 0.543 v_{10} \phi_1 \cos \omega_{o_1} t + 0.349 v_{10} \phi_2 \cos \omega_{o_2} t +$$

$$+ 0.108 v_{10} \phi_3 \cos \omega_{o_3} t \qquad (5.34)$$

Exemplo 5.4. Para o sistema do exemplo 5.2 considera-se as seguintes condições iniciais:

$$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_{10} \qquad \text{e} \qquad \dot{\vec{v}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{v}_{10}$$

Fazendo-se as substituições nas expressões das constantes encontra-se:

$d_1 = v_{10}$ $\qquad$ $d_2 = d_3 = 0$

$c_1 = \dot{v}_{10}$ $\qquad$ $c_2 = c_3 = 0$

A solução obtida é dada por:

$$\vec{v} = \dot{v}_{10}\phi_1 \text{sen}\ \omega_{0_1} t + v_{10}\phi_1 \cos\ \omega_{0_1} t \qquad (5.35)$$

Vê-se que as amplitudes dependem somente do primeiro modo. Substituindo-se o modo e a frequência em (5.35), encontra-se:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{10} \\ v_{10} \end{bmatrix} \qquad (5.36)$$

Conclui-se que o sistema se move, durante todo o tempo, com deslocamento e velocidade iniciais. Este é um movimento de corpo rígido.

5.3. VIBRAÇÃO FORÇADA SEM AMORTECIMENTO

A solução da equação de movimento de uma estrutura com NGL pode ser encontrada de duas maneiras. A primeira segundo a mesma formulação expandida apresentada para um S2GL; a segunda é conhecida por equação modal e é a mais comum nos livros de dinâmica existentes.

5.3.1. FORMA EXPANDIDA

Supõe-se que uma estrutura está submetida a N forças externas, definidas como:

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_o\ f(t) \tag{5.37}$$

e que parte do repouso. De acordo com a fig. 3.10, encontra-se para o acréscimo de velocidade a seguinte equação:

$$d\vec{v} = \underset{\sim}{M}^{-1}\vec{F}_o\ f(\tau)d\tau \tag{5.38}$$

Os deslocamentos elementares são dados, considerando-se que cada uma das massas está sob vibração livre depois do acréscimo de velocidade, sendo:

$$d\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} c_i\phi_i \operatorname{sen} \omega_{o_i}(t-\tau) \tag{5.39}$$

Derivando-se esta equação em relação ao tempo e igualando-se à expressão (5.38) em $t=\tau$, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\phi_i\omega_{o_i} = \underset{\sim}{M}^{-1}\vec{F}_o\ f(\tau)d\tau \tag{5.40}$$

Premultiplicando-se por $\phi_j^T\underset{\sim}{M}$ e aplicando-se as condições de ortogonalidade para $i\neq j$, encontra-se:

$$c_j = \frac{1}{\omega_{o_j}}\frac{\phi_j^T\ \vec{F}_o}{\phi_j^T\ \underset{\sim}{M}\ \phi_j}\ f(\tau)d\tau \tag{5.41}$$

Substituindo-se a expressão (5.41) em $d\vec{v}$ (5.39) e integrando-se os membros, encontra-se a solução da equação de movimento. Assim:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\omega_{o_j}^2}\frac{\phi_j^T\ \vec{F}_o\phi_j}{\phi_j^T\ \underset{\sim}{M}\ \phi_j}\int_0^t \omega_{o_j}\ f(\tau)\operatorname{sen}\omega_{o_j}(t-\tau)d\tau \tag{5.42}$$

Comparando-se as expressões (5.42) e (3.28) nota-se que a integral é

o "fator de amplificação instantânea - $(FAI)_j$" - e é definido do mesmo modo que na seção (3.2.2). Então a expressão (5.42) pode ser escrita como:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_j \, \phi_j (FAI)_j \tag{5.43}$$

onde,

$$\bar{c}_j = \frac{1}{\omega_{o_j}^2} \frac{\phi_j^T \vec{F}_o}{\phi_j^T \underset{\sim}{M} \phi_j} \tag{5.44}$$

é um coeficiente de participação e relaciona trabalho de deformação devido às forças externas com a energia cinética.

5.3.2. PROCESSO DA EQUAÇÃO MODAL

A equação modal é caracterizada por uma transformação de coordenadas cuja finalidade é desacoplar a equação de movimento.

Sabe-se que os modos naturais são vetores linearmente independentes e que podem definir por uma combinação linear, qualquer vetor do espaço considerado. Assim, o vetor dos deslocamentos pode ser escrito como:

$$\vec{v} = \phi_1 \eta_1 + \phi_2 \eta_2 + \ldots + \phi_N \eta_N \tag{5.45}$$

ou

$$\vec{v} = \underset{\sim}{\Phi} \, \vec{\eta} \tag{5.46}$$

onde $\underset{\sim}{\Phi}$ é a matriz modal que transforma as coordenadas generalizadas $\vec{\eta}$ nas coordenadas geométricas $\vec{v}$. Estas coordenadas generalizadas são chamadas de coordenadas normais.

Derivando-se a expressão (5.46) duas vezes em relação ao

tempo e substituindo-se na equação de movimento (5.2), encontra-se:

$$\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\ddot{\vec{\eta}} + \underset{\sim}{K}\,\Phi\,\vec{\eta} = \vec{F}(t) \tag{5.47}$$

Premultiplicando-se a expressão (5.47) pela transposta de um vetor no modo i, torna-se:

$$\phi_i^T\,\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\ddot{\vec{\eta}} + \phi_i^T\,\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\vec{\eta} = \phi_i^T\,\vec{F}(t) \tag{5.48}$$

Se os termos antes da igualdade forem expandidos, todos os termos diferentes de i desaparecem e o resultado é o seguinte:

$$\phi_i^T\,\underset{\sim}{M}\,\phi_i\ddot{\eta}_i + \phi_i^T\,\underset{\sim}{K}\,\phi_i\eta_i = \phi_i^T\,\vec{F}(t) \tag{5.49}$$

Das expressões (5.13) tem-se:

$$m_i\ddot{\eta}_i + k_i\eta_i = \phi_i^T\,\vec{F}(t) \tag{5.50}$$

Dividindo-se a expressão (5.50) por m_i, encontra-se finalmente a equação desacoplada, isto é:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_{0_i}^2\eta_i = \frac{\phi_i^T\,\vec{F}(t)}{m_i} \tag{5.51}$$

ou

$$\ddot{\eta}_i + \omega_{0_i}^2\eta_i = \omega_{0_i}^2\,\frac{\phi_i^T\,\vec{F}_0}{\omega_{0_i}^2\phi_i^T\,\underset{\sim}{M}\,\phi_i}\,f(t) \tag{5.52}$$

Comparando-se a equação (5.52) com (2.70), para um SIGL,

conclui-se o seguinte:

$$\eta_{eo_i} = \frac{\phi_i^T \vec{F}_o}{\omega_{o_i}^2 \, \phi_i^T \underset{\sim}{M} \, \phi_i} \qquad (5.53)$$

fator de participação na forma expandida

Isto corresponde ao deslocamento estático segundo a coordenada η_i. O fator de amplificação - $(FA)_i$ - é expresso pela relação entre η_i e η_{eo_i}.

A expressão de η_{eo_i} em função da matriz de rigidez pode ser conseguida através de um artifício, onde se coloca entre ϕ_i^T e $\vec{F}_0$ o produto de $\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{K}^{-1}$, sem alterar o resultado final. No denominador substitui-se o valor correspondente segundo uma das expressões (5.7) ou (5.8), quando i=j, obtendo-se:

$$\eta_{eo_i} = \frac{\phi_i^T \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{K}^{-1} \vec{F}_o}{\phi_i^T \underset{\sim}{K} \, \phi_i} \qquad (5.54)$$

ou

$$\eta_{eo_i} = \frac{\phi_i^T \underset{\sim}{K} \, \vec{v}_{eo}}{\phi_i^T \underset{\sim}{K} \, \phi_i} \qquad (5.55)$$

Conclui-se portanto, que η_{eo_i} é uma expansão segundo os modos de vibração do deslocamento estático $\vec{v}_{eo}$ - devido ao carregamento $\vec{F}_o$ - por meio da matriz de rigidez.

O deslocamento final é dado pela expressão (5.45), onde η é determinado pela equação (5.52). Este pode ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{v}_i = \phi_i \, \eta_{eo_i} (FA)_i \qquad (5.56)$$

ou

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \eta_{eo_i} \, \phi_i (FA)_i \qquad (5.57)$$

Na equação modal pode-se também trabalhar com a matriz modal normalizada, fazendo-se $\vec{v} = \bar{\Phi}\,\vec{\eta}$. Substituindo na equação de movimento (5.2) chega-se à equação final:

$$\ddot{\vec{\eta}} + \omega_o^2 \vec{\eta} = \bar{\Phi}^T \vec{F}_o \, f(t) \tag{5.58}$$

onde ω_o^2 é a matriz espectral.

Para um modo r qualquer, esta equação toma a forma:

$$\ddot{\eta}_r + \omega_{o_r}^2 \eta_r = \bar{\phi}_r^T \vec{F}_o \, f(t) \tag{5.59}$$

Exemplo 5.5. O pórtico do exemplo 5.1 é excitado por um vetor de forças, fig. 5.3. A solução da equação de movimento, segundo a forma expandida, é feita utilizando-se as expressões (5.43) e (5.44). As constantes $\bar{c}_j$ são:

$$\bar{c}_1 = 6.164 \frac{F_o}{k}$$

$$\bar{c}_2 = -0.18 \frac{F_o}{k}$$

$$\bar{c}_3 = 0.018 \frac{F_o}{k}$$

A solução final é a seguinte:

$$\vec{v} = 6.164 \frac{F_o}{k} \phi_1 (FAI)_1 - 0.18 \frac{F_o}{k} \phi_2 (FAI)_2 + $$

$$+ 0.018 \frac{F_o}{k} \phi_3 (FAI)_3 \tag{5.60}$$

Com a expressão dos $(FAI)_i$, para uma carga senoidal de 1GL tem-se as três amplitudes. Nota-se por esta equação que a contribuição do primeiro modo é maior do que a dos outros dois.

Resolvendo-se este exemplo pela equação modal, pode-se utilizar diretamente a expressão (5.57), onde tem-se para os η_{eo_i} os seguintes valores:

$$\eta_{eo_1} = 6.164 \frac{F_o}{k}$$

$$\eta_{eo_2} = -0.18 \frac{F_o}{k}$$

$$\eta_{eo_3} = 0.018 \frac{F_o}{k}$$

Comparando-se com as constantes calculadas anteriormente, verifica-se que elas têm os mesmos valores. O resultado final será então o mesmo que o anterior.

Conclui-se então, que os dois processos são válidos e chega-se ao mesmo resultado.

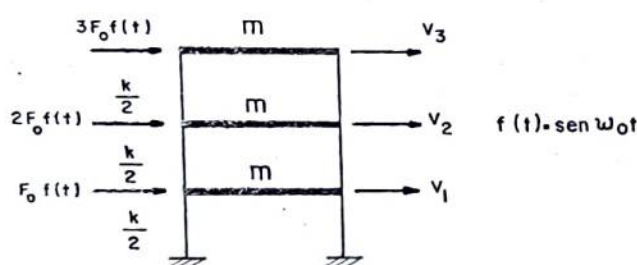



Fig. 5.3. Exemplo 5.5

5.4. VIBRAÇÃO FORÇADA COM AMORTECIMENTO

A equação de movimento para um SNGL, sob vibração forçada com amortecimento, é a seguinte:

$$\underset{\sim}{M}\,\ddot{\vec{v}} + \underset{\sim}{C}\,\dot{\vec{v}} + \underset{\sim}{K}\,\vec{v} = \vec{F}(t) \tag{5.62}$$

A matriz $\underset{\sim}{C}$ é chamada de matriz de amortecimento e seu coeficiente de influência de amortecimento, c_{ij}, é definido como a força na coordenada i devido a uma velocidade unitária na coordenada j.

Neste sistema, os modos de vibração são os mesmos que para um sistema não amortecido dependendo da formação da matriz $\underset{\sim}{C}$.

5.4.1. Condições de Ortogonalidade para o Amortecimento

A condição necessária para que os modos sejam ortogonais à matriz de amortecimento é:

$$\phi_m^T \,\underset{\sim}{C}\, \phi_n = 0 \tag{5.63}$$

para $m \neq n$. Para $m=n$, tem-se:

$$\phi_n^T \,\underset{\sim}{C}\, \phi_n = c_n \tag{5.64}$$

que é o amortecimento generalizado que pela própria definição do coeficiente de amortecimento é:

$$c_n = 2\xi_n \,\omega_{o_n}\, M_n \tag{5.65}$$

Rayleigh definiu a matriz de amortecimento como:

$$\underset{\sim}{C} = a_0\, \underset{\sim}{M} + a_1\, \underset{\sim}{K} \tag{5.66}$$

onde a_0 e a_1 são fatores de proporcionalidade arbitrários.

Esta equação satisfaz a condição desejada (5.63) apenas multiplicando-se ambos os lados pela operação de ortogonalidade. Qualquer matriz que seja uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez é ortogonal. Assim, a matriz de amortecimento ortogonal pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{M} \sum_b a_b [\underset{\sim}{M}^{-1} \underset{\sim}{K}]^b = \sum_b \underset{\sim}{C}_b \tag{5.67}$$

O amortecimento de Rayleigh está naturalmente incluído nesta equação. Com este tipo de equação torna-se possível calcular os coeficientes de influência de amortecimento necessários para que o sistema seja desacoplado com coeficientes de amortecimentos desejados.

Para o amortecimento generalizado, em um modo n, a contribuição do termo b da série, dado pela expressão (5.67) é o seguinte:

$$c_{nb} = \phi_n^T \underset{\sim}{C} \phi_n = a_b \phi_n^T \underset{\sim}{M}[\underset{\sim}{M}^{-1} \underset{\sim}{K}]^b \phi_n \tag{5.68}$$

Da equação (5. 5) sabe-se que $\underset{\sim}{K} \phi_n = \omega_{o_n}^2 \underset{\sim}{M} \phi_n$. Premultiplicando-a por $\phi_n^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{M}^{-1}$, tem-se:

$$\phi_n^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{M}^{-1} \underset{\sim}{K} \phi_n = \omega_{o_n}^2 \phi_n^T \underset{\sim}{K} \phi_n = \omega_{o_n}^4 M_n \tag{5.69}$$

Por operações semelhantes a estas pode-se mostrar o seguinte:

$$\phi_n^T \underset{\sim}{M}[\underset{\sim}{M}^{-1} \underset{\sim}{K}]^b \phi_n = \omega_{o_n}^{2b} M_n \tag{5.70}$$

$$\therefore \quad c_{nb} = a_b \, \omega_{o_n}^{2b} M_n \tag{5.71}$$

Assim, a matriz de amortecimento para algum modo n é dada como:

$$c_n = \sum_b c_{nb} = \sum_b a_b \omega_{o_n}^{2b} M_n = 2\xi_n \omega_{o_n} M_n \qquad (5.72)$$

$$\therefore \quad \xi_n = \frac{1}{2} \sum_b a_b \omega_{o_n}^{(2b-1)} \qquad (5.73)$$

Esta expressão (5.73) proporciona uma maneira de se avaliar as constantes a_b para dar os coeficientes de amortecimento desejado em algum modo especificado; as constantes são determinadas então, das equações simultâneas para os diversos coeficientes. A princípio, b varia no intervalo $(-\infty,\infty)$, mas na prática procura-se utilizar os valores mais próximos de zero.

É interessante notar da expressão (5.73) que quando a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de massa ($\underset{\sim}{C}=a_o \underset{\sim}{M}$; b=0), o coeficiente de amortecimento é inversamente proporcional a frequência de vibração; então os maiores modos de uma estrutura serão pouco amortecidos. Agora, se o amortecimento é proporcional a matriz de rigidez ($\underset{\sim}{C}=a_1\underset{\sim}{K}$; b=1), o coeficiente de amortecimento é diretamente proporcional a frequência; e os maiores modos da estrutura serão lentamente amortecidos.

Como exemplo, deseja-se avaliar as constantes para proporcionar três coeficientes de amortecimento específicos. As equações resultantes da expressão (5.73) são:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^3} & \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2^3} & \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \\ \frac{1}{\omega_3^3} & \frac{1}{\omega_3} & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_o \\ a_1 \end{bmatrix} \qquad (5.74)$$

5.4.2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Derivando-se a expressão (5.46) uma e duas vezes em relação ao tempo, substituindo-se na equação (5.59) e seguindo-se o mesmo procedimento do item 5.3.1, chega-se a equação final, isto é:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_{o_i} \dot{\eta}_i + \omega_{o_i}^2 \eta_i = \omega_{o_i}^2 \frac{\phi_i^T \vec{F}_o}{\omega_{o_i}^2 \, \phi_i^T \, \underset{\sim}{M} \, \phi_i} f(t) \tag{5.75}$$

ou

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_{o_i} \dot{\eta}_i + \omega_{o_i}^2 \eta_i = \omega_{o_i}^2 \eta_{eo_i} \, f(t) \tag{5.76}$$

Essa equação é equivalente a equação para um SIGL sob vibração com amortecimento para carga senoidal - eq. (~~2.79~~ 2.80). Sua solução é dada segundo a expressão (~~2.82~~ 2.84), onde as constantes A e B são determinadas pela aplicação das condições iniciais. A resposta final será dada pelo método de superposição modal.

Exemplo 5.6. Para a estrutura do exemplo 3.8, define-se uma matriz de amortecimento tal que os coeficientes de amortecimento são 5% do crítico.

Dando para b valores entre 0 e 1, e com os valores das frequências calculadas naquele exemplo, tem-se pela expressão (5.74) o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1.414\sqrt{\frac{m}{k}} & 0.707\sqrt{\frac{k}{m}} \\ 0.707\sqrt{\frac{m}{k}} & 1.414\sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.047 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ 0.047 \sqrt{\frac{m}{k}} \end{bmatrix}$$

A matriz de amortecimento segundo Rayleigh é então:

$$\underset{\sim}{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.235 & -0.047 \\ -0.047 & 0.094 \end{bmatrix} \sqrt{mk}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Anotações do curso de dinâmica estrutural, ministrado pelo Prof. João Luis Pascal Roehl, na PUC/RJ.

2. Clough, R.W. e Penzien, J. - "Dynamics of Structures", New York, McGraw-Hill, 1975.